Exercices MP*

Romain Panis

Table des matières

Notations. $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers. Sauf mention explicite du contraire les lettre n, k, p, q désigneront toujours des entiers.

Chapitre 1

Groupes

Exercice 1 (*Existence d'un idempotent*)**.** Soit E un ensemble fini muni d'une loi de composition interne associative. Montrer qu'il existe $s \in E$ tel que $s^2 = s$.

Exercice 2. Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne notée $*$. On suppose que la loi $*$ admet un élément neutre à gauche e, et que tout élément de G admet un inverse à gauche. Montrer que $(G, *)$ est un groupe.

Exercice 3. Soit G un groupe admettant un nombre fini de sous-groupes. Que dire de G ?

Exercice 4 (*p-Groupes de Prüfer*)**.** Soit $p \in \mathcal{P}$. Notons $\mathcal{U}_p$ le sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{C}^*$ engendré par l'ensemble des nombres $\exp\left(\dfrac{2i\pi}{p^\alpha}\right)$ où $\alpha \in \mathbb{N}$.

1. Quels sont les sous-groupes de $\mathcal{U}_p$?
2. Montrer que $\mathcal{U}_p$ est indécomposable, c'est à dire non isomorphe à un produit direct de deux groupes non triviaux.

Les p-groupes de Prüfer fournissent donc des exemples de groupes infinis dont tous les sous-groupes sont finis.

Exercice 5 (*Un cas particulier du lemme de Cauchy (1)*)**.** Soit G un groupe d'ordre $2p$ où $p \in \mathcal{P}$. Montrer que G contient un élément d'ordre p.

Exercice 6 (*Un cas particulier du lemme de Cauchy (2)*)**.** Soit G un groupe abélien d'ordre pq où p et q sont deux nombres premiers distincts. Montrer que G est cyclique.

Exercice 7 (*Lemme de Cauchy*)**.**

1. Soit G un groupe fini de cardinal p^m où $p \in \mathcal{P}$ et $m \geq 1$. On suppose que G opère sur un ensemble fini non vide E. On considère
$$E^G = \{x \in E,\, \forall g \in G\; g \cdot x = x\}.$$
Montrer que $|E^G| \equiv |E|\ [p]$.
2. Soit H un groupe fini d'ordre n et p un diviseur premier de n. Montrer que H contient un élément d'ordre p.
3. Soient H un groupe fini d'ordre n et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $\forall x \in H$, $x^m = e$. Montrer que n divise une puissance de m.

Exercice 8 (*Centre d'un p-groupe*)**.** Soit G un groupe fini de cardinal une puissance non nulle d'un nombre premier. Montrer qu'il existe un élément différent du neutre qui commute à tous les éléments de G.

Exercice 9. Déterminer (à isomorphisme près) les groupes d'ordre p^2 où $p \in \mathcal{P}$.

Exercice 10. Soient G un groupe fini et $p \in \mathcal{P}$.

1. On suppose que G n'admet aucun élément d'ordre p. Montrer que pour tout $x \in G$, il existe un unique élément $y \in G$ tel que $x = y^p$.

2. On suppose désormais que pour tout $x \in G$, l'ordre de x divise p. Soit $g \in G \setminus \{e\}$. Soient $x, y \in \langle g \rangle$ distincts. Montrer que x et y ne sont pas conjugués.

Exercice 11 (*Inégalité de Dixon*)**.** Soit G un groupe fini non commutatif. Montrer que la probabilité que deux éléments de G commutent est majorée par $\frac{5}{8}$.

Exercice 12. Soient $(G, \cdot)$ un groupe fini de cardinal n et $\mathbb{C}[(X_g)_{g \in G}]$ l'anneau des polynômes aux n indéterminées X_g où $g \in G$. On note D le déterminant de la matrice $(X_{gh^{-1}})_{g,h \in G}$.

1. Calculer D lorsque $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2. Montrer que D ne dépend pas de la numérotation des éléments de G.

3. Montrer que D est un polynôme homogène de degré n à coefficients entiers.

4. On suppose G cyclique. Montrer que

$$D = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k X_k \right)$$

où X_k désigne X_{a^k} avec a générateur de G.

5. (*Lemme de Dedekind*) On considère $(f_1, \dots, f_m)$ des morphismes distincts de G dans $\mathbb{C}^*$. Montrer qu'ils forment une famille libre de $\mathcal{F}(G, \mathbb{C}^*)$.

Exercice 13. Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini de cardinal n. On note $\widehat{G}$ l'ensemble des morphismes de $(G, \cdot)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

1. Dans cette question, on suppose que n est premier. Montrer que G est cyclique, puis que $|\widehat{G}| = n$.

Dans les trois questions suivantes, G est supposé abélien et sa loi de groupe est notée additivement. On note $E = \mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ l'ensemble des applications de G vers $\mathbb{C}$.

2. Munir E d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel et préciser sa dimension.

3. Soit $a \in G$. On définit $T_a \in \mathcal{L}(E)$ par $\forall (f, x) \in E \times G$, $T_a(f)(x) = f(x + a)$. Montrer qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres communs à tous les T_a.

4. Montrer que $|\widehat{G}| = n$.

5. Montrer par un exemple que ce résultat tombe en défaut lorsque G n'est plus supposé abélien.

Exercice 14. Soit $(G, \cdot)$ un groupe engendré par une partie finie S stable par passage à l'inverse. Pour $x \in G$, on note $L(x, S)$ la longueur minimale d'une décomposition de x comme produit d'éléments de S. Pour $\varphi : G \to G$ morphisme, on note

$$\Lambda(\varphi, S) = \max_{x \in S} L(\varphi(x), S).$$

1. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln \Lambda(\varphi^n, S)$ existe et ne dépend pas de S.

2. Calculer la quantité précédente dans le cas où $G = \mathbb{Z}^2$ et $\varphi : (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mapsto (2x + y, x + y)$.

Exercice 15 (*Sur les dérangements de* $\mathfrak{S}_n$)**.** Soit $n \geq 2$ un entier, y-a t-il plus de dérangements pairs ou impairs dans $\mathfrak{S}_n$?

Exercice 16. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Déterminer la signature de la permutation μ_σ de $\mathfrak{S}_n$ définie par : $\forall g \in \mathfrak{S}_n$, $\mu_\sigma(g) = \sigma \circ g$.

Exercice 17. Quel est l'ordre maximal d'un élément de $\mathfrak{S}_8$?

Exercice 18. Si $r \geq 1$, si $p_1, \cdots, p_r$ sont des nombres premiers distincts et $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ sont dans $\mathbb{N}^*$, on pose :

$$\psi\left(\prod_{i=1}^{r} {p_i}^{\alpha_i}\right) = \sum_{i=1}^{r} {p_i}^{\alpha_i}.$$

On pose aussi $\psi(1) = 1$. Montrer que $\mathfrak{S}_n$ contient un élément d'ordre m si et seulement si $\psi(m) \leq n$.

Exercice 19 (*Exposant de* $\mathfrak{S}_n$)**.** Montrer que le ppcm des ordres des éléments de $\mathfrak{S}_n$ est :

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor}.$$

Exercice 20. Montrer que la signature est, si $n \geq 2$, le seul morphisme non trivial de $\mathfrak{S}_n$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exercice 21. Trouver une partie génératrice de taille minimale de $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 22. Montrer que le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ constitué des permutations fixant n est un sous-groupe maximal de $\mathfrak{S}_n$ pour l'inclusion.

Exercice 23 (*Carrés de* $\mathfrak{S}_n$)**.**

1. À quelle condition un élément de $\mathfrak{S}_n$ est-il un carré ?

2. À quelle condition un élément de $\mathfrak{S}_n$ est-il le carré d'un unique élément de $\mathfrak{S}_n$?

Exercice 24. Soient $n \geq 3$ un entier, r et s dans $\{1, \ldots, n\}$ tels que $r < s$, $G_{r,s}$ le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ engendré par $(1\ 2\ \ldots\ n)$ et $(r\ s)$. À quelle condition a-t-on $G_{r,s} = \mathfrak{S}_n$?

Exercice 25 (*Un formule explicite pour la signature*)**.** Montrer, si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, que :

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}\ .$$

Exercice 26. Soient X et Y deux ensembles finis non vides et disjoints, σ dans $\mathfrak{S}(X)$, σ' dans $\mathfrak{S}(Y)$ et ρ la permutation de $X \cup Y$ coïncidant avec σ (resp. σ') sur X (resp. Y). Calculer $\varepsilon(\rho)$ à l'aide de $\varepsilon(\sigma)$ et $\varepsilon(\sigma')$.

Exercice 27. Soit p un nombre premier. Trouver le nombre d'éléments d'ordre p de $\mathfrak{S}_{2p}$.

Exercice 28. Soient p un nombre premier, a dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ et :

$$\begin{array}{rcccc} \sigma_a & : & (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* & \to & (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \\ & & x & \mapsto & ax \end{array}$$

Calculer $\varepsilon(\sigma_a)$.

Exercice 29 (*Théorème de Frobenius-Zolotarev*)**.** Soient $\mathbb{K}$ un corps fini et M un élément de $GL_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 1$. Soit ρ_M la permutation de $\mathbb{K}^n$ associée. Calculer $\varepsilon(\rho_M)$.

Exercice 30.

1. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, de décomposition en cycles de supports disjoints de la forme $\gamma_1 \circ \cdots \circ \gamma_r$ où la longueur de γ_i est ℓ_i ($\ell_i \geq 2$). On note
$$p(\sigma) = \sum_{i=1}^{r} (\ell_i - 1)\ .$$
Montrer que σ est produit de $p(\sigma)$ transpositions.
2. Montrer qu'on ne peut écrire σ comme produit de moins de $p(\sigma)$ transpositions.
3. Quel est le cardinal minimal d'un système générateur de $\mathfrak{S}_n$ formé de transpositions ?

Exercice 31. Montrer, si $n \geq 3$, que $\mathfrak{S}_n$ n'est pas isomorphe au produit direct de $\mathcal{A}_n$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 32. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Calculer, en fonction de la décomposition en cycles de σ, le cardinal de la classe de conjugaison de σ dans $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 33. Si $1 \leq k < \ell \leq n$, quel est le groupe de $\mathfrak{S}_n$ engendré par $(1, 2, \cdots, k)$ et $(1, 2, \cdots, \ell)$?

Exercice 34 (*Probabilité que deux permutations commutent*)**.** Déterminer la limite de
$$p_n = \frac{\left|\left\{(g,h) \in (\mathfrak{S}_n)^2\ ,\ g \circ h = h \circ g\right\}\right|}{(n!)^2}.$$

Exercice 35 (*Automorphismes de* $\mathfrak{S}_n$)**.** Soit n un entier ≥ 3.

1. Montrer que tout automorphisme de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ qui transforme toute transposition en une transposition est intérieur.
2. (*Théorème de Hölder*) Si $n \neq 6$, montrer que tout automorphisme de $\mathfrak{S}_n$ est intérieur. On pourra utiliser la question **1.** et le dénombrement d'une classe de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 36. Soit $p \in \mathcal{P}$. On admet que $(\mathbb{F}_p^*, \times)$ est cyclique. Soit $n \geq 1$. Pour tout $Q \in \mathbb{F}_p[X_1, \ldots, X_n]$, on pose
$$S_n(Q) = \sum_{(x_1,\ldots,x_n) \in (\mathbb{F}_p)^n} Q(x_1, \ldots, x_n).$$

1. Soit $Q \in \mathbb{F}_p[X]$ de degré strictement inférieur à $p-1$. Montrer que $S_1(Q) = 0$.
2. On considère des polynômes à n variables $F_1, \ldots, F_m$ sur $\mathbb{F}_p$ dont la somme des degrés est strictement inférieure à n. On note $V = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}_p^n \mid \forall i \in [\![1, m]\!],\ F_i(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$. Montrer que p divise $|V|$. Montrer que si le terme constant de chaque F_i est nul, alors V contient un autre élément que $(0, \ldots, 0)$.
3. On suppose $n \geq 2$ et on donne des entiers $a_1, \ldots, a_{2n-1}$. Montrer qu'il existe des indices $i_1, \ldots, i_n$ distincts tels que $a_{i_1} + \ldots + a_{i_n} \equiv 0[n]$.
4. Montrer le résultat admis.

Exercice 37. Soient p un nombre premier et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum_{x \in \mathbb{F}_p} x^k$ ne peut prendre que deux valeurs. Préciser dans quels cas on obtient ces valeurs.

Exercice 38. Soit $p > 2$ un nombre premier. Montrer que
$$\overline{-1} \text{ est un carré de } \mathbb{F}_p \iff p \equiv 1\ [4].$$

Exercice 39 (*Critère d'Euler*)**.** Soient $p > 2$ un nombre premier et $x \in \mathbb{F}_p$. Montrer que
$$x \text{ est un carré de } \mathbb{F}_p \iff x^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\ [p].$$

Exercice 40 (*Parties sans somme de $\mathbb{Z}$*).

1. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $3k+2$.
2. Soient $p \in \mathcal{P}$ de la forme $3k+2$ et $A \subset \mathbb{F}_p^*$. Si $x \in \mathbb{F}_p^*$, on pose $B(x) = A \cap \{(k+1)x, \dots, (2k+1)x\}$. Calculer $\sum_{x \in \mathbb{F}_p^*} |B(x)|$.
3. Si $(G,+)$ est un groupe abélien, on dit d'une partie B de $G \setminus \{0\}$ qu'elle est *sans somme*, lorsque pour tout $x, y \in G$, $x + y \notin B$. Soit A une partie finie non vide de $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Montrer qu'il existe une partie sans somme B de A vérifiant $|B| > |A|/3$.

Exercice 41. Soit $(G,+)$ un groupe abélien. On définit $\varphi : \mathcal{P}(G) \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ comme suit : soit $A \subset G$; on considère les parties B de A telles que pour tout $b, b' \in B$ avec $b \neq b'$, on ait $b + b' \notin A$. On note $\varphi(A)$ le plus grand cardinal d'une telle partie A.

1. Déterminer $\varphi(A)$ si A est un sous-groupe de A.
2. Montrer que si A est la réunion de k sous-groupes de G où $k \geq 1$, alors $\varphi(A) \leq k$.
3. On prend ici $G = \mathbb{Z}$. On suppose $A \subset \mathbb{N}^*$ et $|A| = 2^k$. Montrer que $\varphi(A) \geq k+1$.

Exercice 42 (*Théorème de Lie-Kolchin*). Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe connexe par arcs de $GL(V)$. Si $\Gamma \subset GL(V)$ et $\Phi : \Gamma \to \mathbb{C}$, on pose $V_\Phi = \{v \in V \mid \forall \gamma \in \Gamma,\ \gamma(v) = \Phi(\gamma)v\}$.

1. On se donne un vecteur propre v commun à tous les éléments de G (dont on suppose l'existence), et l'on note $\Phi : G \to \mathbb{C}$ l'application qui à tout $g \in G$ associe la valeur propre de g associée à v. Montrer que Φ définit un morphisme continu de $G \to \mathbb{C}^*$ dont l'image est connexe par arcs.
2. Ayant fixé Γ, montrer que les sous-espaces V_Φ lorsque Φ parcourt l'ensemble de toutes les fonctions de Γ dans $\mathbb{C}$ sont en somme directe.
3. On note $D(G)$ le groupe engendré par les éléments de la forme $aba^{-1}b^{-1}$ où $a, b \in G$. Montrer que $D(G)$ est un sous-groupe distingué de G, c'est à dire pour tout $g \in G$, pour tout $x \in D(G)$, $gxg^{-1} \in D(G)$.
4. Soit v un vecteur propre commun à tous les éléments de $D(G)$. Montrer que pour tout $g \in G$, le vecteur $g(v)$ est vecteur propre commun à tous les éléments de $D(G)$.
5. Montrer que $D(G)$ est connexe par arcs.
6. Soit v un vecteur propre commun à tous les éléments de $D(G)$ et $\Phi : D(G) \to \mathbb{C}$ qui à tout $g \in D(G)$ associe la valeur propre de g associée à v. Montrer que tout élément de G laisse V_Φ stable.
7. On suppose qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $D^n(G) = \{\mathrm{Id}_V\}$. En utilisant les résultats précédents, montrer par récurrence qu'il existe une base de V dans laquelle tous les éléments de G sont représentés par des matrices triangulaires supérieures.

Exercice 43. Soit $p > 2$ un nombre premier. Calculer $|SO_2(\mathbb{F}_p)|$.

Exercice 44. Quelles sont les matrices $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ telles que $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$\exists M \in GL_n(\mathbb{Z}),\ M^k = A\,?$$

Exercice 45. Montrer que le commutant de toute matrice de $SL_n(\mathbb{C})$ est infini.

Exercice 46. Soit $(A,+,\times)$ un anneau tel que $x^2 = x$ pour tout $x \in A$. Montrer que A est commutatif. Montrer que la conclusion subsiste si l'on suppose $x^3 = x$ pour tout $x \in A$ ou bien $x^4 = x$ pour tout $x \in A$.

Exercice 47. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les nilpotents de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 48 (*Anneaux finis isomorphes à un produit de corps finis*)**.**

1. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit isomorphe à un produit de corps finis.
2. Soit A un anneau commutatif fini. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit isomorphe à un produit de corps finis.

Exercice 49. Déterminer les couples (A, B) de parties de $\mathbb{N}$ vérifiant :

(i) $A \cup B = \mathbb{N}$ et $A \cap B = \emptyset$;

(ii) $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, $a + b \in A$ et $ab \in B$.

Exercice 50 (*Un théorème de Beatty*)**.** Soient $a, b > 1$. On définit $E = \{\lfloor na \rfloor | n \in \mathbb{N}^*\}$ et $F = \{\lfloor nb \rfloor | n \in \mathbb{N}^*\}$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) E et F partitionnent $\mathbb{N}^*$;

(ii) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ et $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 51. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\Gamma_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, , \, x^2 + y^2 = n\}$ et $\Delta_n = \Gamma_n \cap \mathbb{Q}^2$.

1. Δ_1 est-il dense dans Γ_1 ?
2. Δ_2 est-il dense dans Γ_2 ?
3. Δ_3 est-il dense dans Γ_3 ?
4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que Δ_n soit dense dans Γ_n.

Chapitre 2

Arithmétique

Exercice 52. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$ impair. Montrer que

$$(1 + \ldots + n) \mid (1^k + \ldots + n^k).$$

Exercice 53. On considère la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \geq 0}$ définie par la relation de récurrence $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ et la condition initiale $(F_0, F_1) = (0, 1)$. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Calculer $F_{mn} \wedge F_{m(n+1)}$.

Exercice 54. Soit $k \geq 2$ un entier. Montrer que le produit de trois entiers consécutifs non nuls ne peut pas être une puissance k-ième.

Exercice 55 (*Un théorème de Kurschak*)**.** Pour quelles valeurs entières $n \geq m$ a t-on

$$\sum_{i=m}^{n} \frac{1}{i} \in \mathbb{N}\,?$$

Exercice 56 (*Formule de Legendre*)**.** Soit $n \geq 2$, soit p un nombre premier. Montrer que

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

Exercice 57. Soient p un nombre premier, $n \geq 1$ un entier et $k \in [\![1, p^n - 1]\!]$. Déterminer $v_p\left(\binom{p^n}{k}\right)$.

Exercice 58 (*Une version faible du théorème de Dirichlet*)**.** On note $\Phi_1 = X - 1$. Pour $n \geq 2$, on définit le n-ième polynôme cyclotomique par

$$\Phi_n = \prod_{1 \leq k \leq n\,,\, n \wedge k = 1} (X - e^{\frac{2\pi i k}{n}}).$$

1. Montrer que Φ_n est à coefficients entiers pour tout $n \geq 1$.

2. Que dire d'un nombre premier p tel que $p \mid \Phi_n(a)$ où $a \in \mathbb{Z}$ mais aucun des $\Phi_d(a)$ où d décrit l'ensemble des diviseurs stricts de n ?

3. En déduire une version faible du théorème de Dirichlet : Pour $n \geq 1$ fixé, il existe une infinité de nombres premiers de la forme $\lambda n + 1$ où $\lambda \in \mathbb{N}^*$.

Le théorème de Dirichlet stipule en fait que toute progression arithmétique de la forme $an + b$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \wedge b = 1$ contient une infinité de nombres premiers.

Exercice 59.

1. Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.
2. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on note $p(n)$ le plus grand diviseur premier de n et on pose $E = \{n \geq 2\ ,\ p(n) < p(n+1) < p(n+2)\}$. Soit q un nombre premier différent de 2. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = q^{2^n} - 1$ et $v_n = q^{2^n} + 1$. Montrer que $(u_n \notin E) \Leftrightarrow (\ p(u_n) \geq q$ ou $p(v_n) \leq q\ )$.
3. Montrer que si $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \neq n$, alors

$$\left(\frac{v_n}{2}\right) \wedge \left(\frac{v_m}{2}\right) = 1.$$

4. En déduire que E est infini.

Exercice 60 (*Minoration de Tchebychev*)**.**

1. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, l'entier $a\binom{a+b}{a}$ divise $\mu(a, b) = \mathrm{ppcm}(b+1, \ldots, b+a)$. On pourra exprimer l'entier $a\binom{a+b}{a}$ sous forme d'intégrale.
2. Pour $n \geq 1$, on pose $\mu_{n+1} = \mathrm{ppcm}(1, \ldots, n+1)$. Montrer que $(n+1)\mathrm{ppcm}\left(\binom{n}{i}\right)_{1 \leq i \leq n} = \mu_{n+1}$.
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\mu_n \geq 2^n$.
4. Pour $n \geq 1$, on note $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n. Montrer que $n^{\pi(n)} \geq 2^{n-1}$. En déduire une minoration de $\pi(n)$.

Chapitre 3

Corps, polynômes, fractions rationnelles

Exercice 61. Soit $\mathbb{K}$ un corps. On introduit,

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \mid n \in \mathbb{N}^*,\ x_i \in \mathbb{K} \right\}.$$

Montrer que S est stable par somme, produit et division.

Exercice 62 (*Dénombrement sur les corps finis*)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps fini commutatif de cardinal q. Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Calculer $|GL_n(\mathbb{K})|$ et $|SL_n(\mathbb{K})|$.
2. Calculer plus généralement $\alpha_r = |\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{rg}(M) = r\}|$ pour $r \in \{1, \ldots, n\}$.
3. Calculer le nombre d'espaces vectoriels de dimension r de $\mathbb{K}^n$ où $r \in \{1, \ldots, n\}$.
4. Calculer le nombre de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
5. Calculer le nombre de matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   Indication : on pourra utiliser une décomposition de Fitting.

Exercice 63 (*Un théorème de Brauer*)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps. Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $P(\sigma)$ sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Établir le fait suivant,

Deux permutations σ_1, σ_2 sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n \iff P(\sigma_1)$ et $P(\sigma_2)$ sont semblables.

Exercice 64 (*Lemme d'Artin*)**.** Soit F un sous-corps de $\mathbb{C}$. Soit G un groupe fini d'automorphismes de F. On note $F^G = \{x \in F \mid \forall g \in G,\ g(x) = x\}$. On vérifie facilement que F^G est un corps. On souhaite montrer que $[F : F^G] = |G|$ (c'est à dire que la dimension de F comme F^G-espace vectoriel vaut $|G|$).

1. (*Lemme de Dedekind*) Soient M un groupe, F un corps, $(\sigma_i)_{i \in I}$ une famille de morphismes de $M \to (F^*, \times)$. Montrer que $(\sigma_i)_{i \in I}$ est libre dans le F-espace vectoriel $\mathcal{F}(M, F)$.
2. Soient $X \neq \emptyset$, F un corps, $(f_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{F}(X, F)$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   - (*i*) $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre.
   - (*ii*) $\exists (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ tel que $M = (f_i(x_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ soit inversible.
3. Conclure.

Exercice 65 (*Une caractérisation des corps algébriquement clos*)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\mathbb{K}$ est algébriquement clos ;
- (ii) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout polynôme non constant de $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ admet au moins un zéro dans $\mathbb{K}^n$;
- (iii) pour tout entier $n \geq 2$, tout polynôme homogène de degré n de $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ admet au moins un zéro dans $\mathbb{K}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$.

Exercice 66. Soit $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$. Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et en déterminer les automorphismes.

Exercice 67. Soit $\mathbb{K}$ un corps fini. On note $\mathfrak{P}_{\mathbb{K}}$ l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{K}[X]$. On pose pour $t \in \mathbb{R}$, lorsque cela a un sens,

$$\zeta(t) = \prod_{P \in \mathfrak{P}_{\mathbb{K}}} \frac{1}{1 - t^{\deg P}}.$$

1. Montrer qu'il existe $t_0 >$ tel que ζ soit bien définie sur $] - t_0, t_0[$.
2. Montrer que ζ est développable en série entière autour de 0. Calculer $\zeta(t)$ et préciser le rayon de convergence.

Exercice 68 (*Une généralisation d'un résultat classique*)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif infini. Soit $\mathbb{L}$ un sur-corps de $\mathbb{K}$, et soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que M et N sont semblables sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{L})$. Montrer qu'elles le sont aussi sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 69 (*Extension algébrique*)**.** Soient $\mathbb{K}$ un corps et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme irréductible. Pour A, B dans $\mathbb{K}[X]$, on dit que $A \equiv B$ si P divise $A - B$.

1. Montrer que $\equiv$ est une relation d'équivalence. On note $\overline{A}$ la classe d'équivalence de A.
2. On note $\mathbb{L}$ l'ensemble des classes d'équivalence de cette relation. Munir $\mathbb{L}$ d'une structure de corps telle que l'application $\pi : A \in \mathbb{K}[X] \mapsto \overline{A} \in \mathbb{L}$ soit un morphisme d'anneaux.
3. Exhiber un morphisme de corps injectif de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{L}$.
4. Montrer que P admet une racine dans $\mathbb{L}$.
5. Déterminer un sous-corps de $\mathbb{C}$ isomorphe à $\mathbb{L}$ lorsque $P = X^2 + 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, puis lorsque $P = X^3 - 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

Exercice 70.

1. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X) = P(1 - X)$.
2. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $P(X^2) = P(X)P(X + 1)$.

Exercice 71. Soient $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $p \in \mathcal{P}$. On dit que p est un diviseur de P s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n) \neq 0$, et $P(n) \equiv 0\ [p]$. Montrer que tout polynôme non constant admet une infinité de diviseurs

Exercice 72. Soient $z_0, \ldots, z_n$ $n + 1$ nombres complexes distincts tels que pour tout polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$,

$$P(z_0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P(z_k).$$

Montrer que $z_1, \ldots, z_n$ sont les sommets d'un polygone régulier de centre z_0.

Exercice 73. Soient $1 \leq n \leq d$ et $P \in \mathbb{C}_n[X]$. On suppose qu'il existe $z_0, \ldots, z_n \in \mathbb{U}_{d+1}$ deux à deux distincts tels que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,
$$P(z_i) \leq \frac{1}{2^d}.$$
Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq 1 \Rightarrow |P(z)| \leq 1$.

Exercice 74. Soit $\mathcal{A}$ la sous-algèbre de $\mathbb{R}[X]$ engendrée par X^2 et X^3. $\mathcal{A}$ est-elle isomorphe à $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 75. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$ et scindé sur $\mathbb{R}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On note
$$E_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R} \, , \, \frac{P'(x)}{P(x)} \geq \alpha \right\}.$$
Montrer que E_α est une réunion finie d'intervalles de $\mathbb{R}$ et calculer la somme des longueurs de ces intervalles.

Exercice 76 (*Grand théorème de Fermat pour les polynômes*)**.** Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on note $n(P)$ le nombre de racines distinctes de P.

1. Soient $A, B, C \in \mathbb{C}[X]$ non nuls et premiers entre eux dans leur ensemble. On suppose $A+B = C$. Montrer que
$$n(ABC) \geq 1 + \max\{\deg A, \deg B, \deg C\}.$$
2. En déduire le grand théorème de Fermat pour les polynômes : Si $A, B, C \in \mathbb{C}[X]$ non constants et premiers entre eux deux à deux sont tels que
$$A^n + B^n = C^n,$$
alors $n \leq 2$.

Exercice 77. Existe-t-il une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ soit scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$?

Exercice 78 (*Inégalité de Bernstein*)**.**

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, \ldots, z_n$ les racines de $X^n + 1$. Montrer que si $P \in \mathbb{C}_n[X]$,
$$XP'(X) = \frac{n}{2} P(X) + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k P(z_k X)}{(z_k - 1)^2}.$$
2. Si $P \in \mathbb{C}[X]$, on pose $\|P\| = \sup_{|z|=1} |P(z)|$. Montrer que si $P \in \mathbb{C}_n[X]$,
$$\|P'\| \leq n \|P\|.$$

Exercice 79. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n \geq 1$. On pose $g : t \in \mathbb{R} \mapsto P(\cos(t))$.

1. Montrer qu'il existe un unique vecteur $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que,
$$\forall t \in \mathbb{R}, \; g(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k \cos(kt).$$
Calculer b_n. Montrer enfin,
$$\|P\|_{\infty, [-1,1]} \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$
2. Soient $Q \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$ et S un segment tel que pour tout x dans S, $|Q(x)| \leq 2$. Majorer la longueur de S.

Exercice 80 (*Un théorème de Kronecker*)**.** Soit P un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$ dont les racines complexes sont toutes de module inférieur ou égal à 1. On suppose aussi $P(0) \neq 0$. Montrer que les racines de P sont des racines de l'unité.

Exercice 81.

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(\cdot, y)$ est polynomiale pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $f(x, \cdot)$ est polynomiale pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est polynomiale.

2. Est-ce encore vrai si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Q}$?

Exercice 82. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que f est localement polynomiale en tout point. Montrer que f est polynomiale.

Exercice 83. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des entiers naturels qui s'écrivent en base 10 uniquement avec des 1. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ qui stabilisent $\mathcal{A}$.

Exercice 84.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^+$. Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$. Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + XB^2$.

3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P([-1, 1]) \subset \mathbb{R}^+$. Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + (1 - X^2)B^2$.

Exercice 85 (*Nombres transcendants, nombres de Liouville*)**.** Un nombre complexe $\alpha \in \mathbb{C}$ est dit *algébrique* sur $\mathbb{Q}$ s'il existe $P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

1) Montrer que l'ensemble $\mathbb{A}$ des nombres réels algébriques sur $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

2) a) Soit $a \in \mathbb{R}$ algébrique sur $\mathbb{Q}$, racine de $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire avec $\deg P = n > 0$. On suppose $a \notin \mathbb{Q}$, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$,

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{\alpha}{q^n}.$$

b) Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ avec $q \geq 2$ tel que

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^k}.$$

Montrer que a est transcendant. Un tel nombre est appelé nombre de Liouville.

c) Montrer que $a = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{10^{k!}}$ est un nombre de Liouville.

Exercice 86 (*Formules de Newton*)**.** Soient $n \geq 2$, $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$. Pour $p \in \mathbb{N}$ on pose $S_p = \sum_{i=1}^{n} x_i^p$. On note $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ les fonctions symétriques élémentaires des x_i définies par

$$\sigma_k = \sum_{I \subset [\![1,n]\!],\, |I|=k} \prod_{i \in I} x_i = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} x_{i_1} \ldots x_{i_n}.$$

Démontrer les relations suivantes :

1. Si $p \geq n$,

$$S_p - \sigma_1 S_{p-1} + \ldots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} S_{p-n-1} + (-1)^n \sigma_n S_{p-n} = 0.$$

2. Si $p \in [\![1, n-1]\!]$,

$$S_p - \sigma_1 S_{p-1} + \ldots + (-1)^{p-1} \sigma_{p-1} S_1 + (-1)^p p \sigma_p = 0.$$

3. (*Une application*) Soient $z_1, \ldots, z_p$ des nombres complexes de module 1. On suppose que la suite de terme général $u_n = \sum_{i=1}^{p} z_i^p$ converge. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 87. Soient $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ non constants.

1. On suppose que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}\,,\ P(n)|Q(n)\}$ est infini. Montrer que P divise Q dans $\mathbb{Q}[X]$.
2. On suppose que pour tout couple d'entiers distincts (a, b), $P(b) - P(a)$ divise $Q(b) - Q(a)$. Montrer qu'il existe un polynôme $H \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $Q = H(P)$.

Exercice 88. Soient $p \in \mathcal{P}$, et $n_1, \ldots, n_p$ des entiers strictement positifs. On note d le pgcd des n_i. Montrer que le polynôme

$$\frac{X^{n_1} + \ldots + X^{n_p} - p}{X^d - 1} \text{ est irréductible sur } \mathbb{Z}[X].$$

Exercice 89.

1. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.
2. Déterminer les fractions rationnelles $F \in \mathbb{C}(X)$ vérifiant $F(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

Exercice 90. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $\{\alpha \in \mathbb{R}, P - \alpha \text{ est scindé }\}$ est un intervalle (éventuellement vide) fermé de $\mathbb{R}$.

Exercice 91 (*Discriminant d'un polynôme*)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré n. On pose

$$P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - z_i), \text{ et } \operatorname{disc}(P) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1\leq i\neq j\leq n}(z_i - z_j).$$

1. Montrer que $\operatorname{disc}(P) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} P'(z_i)$.
2. Calculer $\operatorname{disc}(P)$ si $P = X^2 + aX + b$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $B = (\operatorname{Tr} A^{i+j-2})_{1\leq i,j\leq n}$. Montrer que $\operatorname{disc}(\chi_A) = \det B$.
4. Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $\operatorname{disc}(P) \in \mathbb{Z}[a_0, \ldots, a_{n-1}]$.

Exercice 92. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ à coefficients dans $\{0, 1\}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$, montrer qu'il existe un unique élément $P \in \mathcal{A}$ tel que $P(-2) = n$.

Exercice 93. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$.

Exercice 94. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$ des entiers deux à deux distincts. On pose $P = (X - a_1)\ldots(X - a_n) - 1$. Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$. Que penser de $Q = P + 2$?

Exercice 95. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $d \geq 1$. On note $n(z)$ le nombre de solutions de l'équation $P(x) = z$. Donner une expression de

$$\sum_{z\in\mathbb{C}}(d - n(z)).$$

Exercice 96. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. On suppose P scindé sur $\mathbb{R}$. Quel est le signe de $PP'' - (P')^2$?
2. On suppose que $PP'' - (P')^2 < 0$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que P s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$. Est-ce que P est nécessairement scindé sur $\mathbb{R}$?

Exercice 97. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E une partie non vide de l'espace affine des polynômes unitaires de degré n. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(i) E est borné (pour une norme quelconque sur $\mathbb{C}_n[X]$) ;

(ii) l'ensemble des z de $\mathbb{C}$ qui sont racines d'un élément de E est une partie bornée de $\mathbb{C}$.

Exercice 98 (*Continuité des racines* (1))**.** Soient $z_1, \dots, z_p$ des complexes deux à deux distincts, $n_1, \dots, n_p$ dans $\mathbb{N}^*$ et

$$P = \prod_{i=1}^{p} (X - z_i)^{n_i}.$$

On pose $n = \sum_{i=1}^{p} n_i$. Montrer, si $0 < \varepsilon < \min \{|z_i - z_j|,\ 1 \leq i < j \leq p\}$, que tout polynôme unitaire de degré n assez près de P dans $\mathbb{C}_n[X]$ a, pour $i \in \{1, \dots, p\}$ exactement n_i racines comptées avec multiplicités dans $B(z_i, \varepsilon)$.

Indication : utiliser l'exercice précédent et un argument de compacité.

Exercice 99 (*Continuité des racines* (2))**.**

1. Soient $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C}\,,\, |z - a| \leq r\}$. On considère P dans $\mathbb{C}[X]$ et on suppose que P ne s'annule pas sur le cercle frontière de $D(a, r)$. Montrer que le nombre de racines de P dans $D(a, r)$ comptées avec multiplicités est :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{P'}{P} \left(a + re^{i\theta}\right) re^{i\theta} \, \mathrm{d}\theta.$$

2. (*Lemme de Rouché*) Sous les hypothèses de **1.** on suppose que Q est dans $\mathbb{C}[X]$ et vérifie : $|Q(z)| < |P(z)|$ pour tout z dans le cercle frontière de $D(a, r)$.
Montrer que P et $P + Q$ ont même nombre de racines comptées avec multiplicités dans $D(a, r)$.

3. Retrouver le résultat de l'exercice précédent.

Exercice 100 (*Lemme de Riesz*)**.** Soit P est un polynôme trigonométrique tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) \in \mathbb{R}^+.$$

Montrer qu'il existe Q dans $\mathbb{C}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = \left|Q(e^{ix})\right|^2.$$

Exercice 101 (*Contenu et lemme de Gauss*)**.** Si P est un élément de $\mathbb{Z}[X]$, on appelle *contenu* de P et on note $c(P)$ le pgcd des coefficients de P.

1. On suppose que P et Q sont dans $\mathbb{Z}[X]$ avec $c(P) = c(Q) = 1$. Montrer $c(PQ) = 1$.

Indication : on supposera par l'absurde qu'il existe p premier divisant $c(PQ)$ et on réduira modulo p.

2. Soient P et Q dans $\mathbb{Z}[X]$. Montrer que $c(PQ) = c(P)c(Q)$.

3. Montrer que si le polynôme P de $\mathbb{Z}[X]$ est produit de deux polynômes non constants de $\mathbb{Q}[X]$, il est produit de deux polynômes non constants de $\mathbb{Z}[X]$.

Ainsi, pour étudier l'irréductibilité sur $\mathbb{Q}$ d'un polynôme entier, il suffit d'en étudier l'irréductibilité sur $\mathbb{Z}$. Mieux : les irréductibles de $\mathbb{Z}[X]$ sont les polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ irréductibles sur $\mathbb{Q}[X]$ et de contenu 1.

Exercice 102. Montrer que X^4+1 est irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 103 (*Critère d'Eisenstein*)**.** Soient p un nombre premier, $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ dans $\mathbb{Z}[X]$. On suppose que p divise a_k si $0 \leq k \leq n-1$, que p ne divise pas a_n, que p^2 ne divise pas a_0. Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Z}$, donc sur $\mathbb{Q}$.

Indication : on réduira modulo p une factorisation dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 104. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)=m^2$. On veut établir l'existence de $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P=Q^2$.

1. Est-il nécessaire que P soit à coefficients entiers ?
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(]a,+\infty[,\mathbb{R})$ qui à toute fonction lisse f associe la fonction $x \mapsto f(x+1)-f(x)$. Montrer que pour tout f de $\mathcal{C}^\infty(]a,+\infty[,\mathbb{R})$, tout $x>a$ et tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\theta \in]0,n[$ tel que
$$(\Delta^n f)(x) = f^{(n)}(x+\theta).$$
3. Conclure.

Exercice 105 (*Lemme de Schwarz-Zippel*)**.** Soient $\mathbb{K}$ un corps, P un polynôme de $\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$ de degré d et S une partie finie de $\mathbb{K}$. Montrer que l'ensemble des n-uplets $(x_1,\dots,x_n)$ tels que :
$$P(x_1,\dots,x_n)=0$$
est de cardinal au plus $d|S|^{n-1}$.

Indication : on pourra raisonner par récurrence sur $n \geq 1$.

Exercice 106. Soit $(P_k)_{k\geq 0} \in \mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]^{\mathbb{N}}$ une suite de polynômes à n indéterminées sur le corps $\mathbb{C}$ telle que pour tout $X \in \mathbb{C}^n$, $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $P_k(X)=0$. Montrer que l'un des P_k est nul.

Indication : on pourra utiliser le théorème de Baire.

Exercice 107. Soit $P \in \mathbb{R}[X,Y,Z]$ un polynôme homogène tel que pour tout $(x,y,z) \in (\mathbb{R}^+)^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, $P(x,y,z)>0$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(X+Y+Z)^n P(X,Y,Z)$ ait tous ses coefficients positifs ou nuls.

Exercice 108. Soit $\mathcal{E}$ une partie de $\mathbb{R}^2$ telle que $\forall M \in \mathbb{R}^2$, $d(M,\mathcal{E}) \leq 1$. Déterminer l'ensemble
$$\{P \in \mathbb{R}[X,Y]\ ,\ P(\mathcal{E})=\{0\}\}.$$

Chapitre 4

Algèbre linéaire

Exercice 109. Existe-t-il $a_1, \ldots, a_{n^2} \in \mathbb{R}$ tels que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ obtenue à partir de ces n^2 coefficients soit inversible ?

Exercice 110. Déterminer les corps $\mathbb{K}$ et les entiers naturels n tels que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ soit somme de deux matrices inversibles.

Exercice 111 (*La transposition n'est pas un changement de base*)**.** Existe-t-il $P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$^tA = PAQ?$$

Exercice 112. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Combien de coefficients de A faut-il modifier au minimum pour que A devienne inversible ?

Exercice 113 (*Lemme de Siegel*)**.** Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ avec $n > m$ et $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe un entier $\alpha > 0$ tel que pour tout $(i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]$, $|a_{ij}| \leq \alpha$. Montrer qu'il existe $X \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ tel que $AX = 0$ avec, si $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$, pour $j \in [\![1,n]\!]$,

$$|x_j| \leq (n\alpha)^{\frac{m}{n-m}} + 1.$$

Exercice 114 (*Sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang majoré*)**.** Soit V un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $M \in V$, on ait $\mathrm{rg}(M) \leq p$. On veut montrer que $\dim V \leq pn$.

1) Montrer que l'on peut se ramener au cas où V contient $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette condition sera supposée vérifiée par la suite. Montrer que toute matrice de V peut s'écrire $\begin{pmatrix} A & C \\ B & 0 \end{pmatrix}$, où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R})$ et $BC = 0$.
2) Conclure en considérant l'application qui à tout élément $\begin{pmatrix} A & C \\ B & 0 \end{pmatrix}$ de V associe $(A, {}^tB + C)$.
3) Montrer que le résultat est encore vrai si l'on remplace $\mathbb{R}$ par un corps infini $\mathbb{K}$ quelconque. On considèrera $q : \begin{pmatrix} A & C \\ B & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & C \\ B & 0 \end{pmatrix}$, $W = q(V)$ et $\Phi : \begin{pmatrix} 0 & C \\ B & 0 \end{pmatrix} \in W \mapsto C \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et on montrera que si $\begin{pmatrix} 0 & C \\ B & 0 \end{pmatrix} \in \ker \Phi$ alors pour tout élément $C' \in \mathrm{Im}\Phi$ on a $BC' = 0$. On en déduira $\dim W \leq p(n-p)$ avant de conclure.

Exercice 115 (*Endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stabilisant le groupe linéaire*)**.** Soit $u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. On suppose que u stabilise $GL_n(\mathbb{C})$.

1) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur M pour qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P - \lambda M$ soit inversible pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. En déduire que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
$$M \in GL_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow u(M) \in GL_n(\mathbb{C}).$$
2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que $P - \lambda M$ soit non inversible pour exactement $\operatorname{rg}(M)$ valeurs de λ. En déduire que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
$$\operatorname{rg}(u(M)) \geq \operatorname{rg}(M).$$
3) Montrer que u conserve le rang.

Exercice 116 (*Familles positivement génératrices*). Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille positivement génératrice au sens où pour tout $x \in E$, il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ strictement positifs tels que $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$.

1) Montrer que $p \geq n+1$. Donner un exemple de famille positivement génératrice de cardinal $n+1$.
2) On suppose $p \geq 2n+1$. Montrer qu'il existe une sous-famille stricte de $\mathcal{F}$ qui est encore positivement génératrice. Donner un exemple de famille positivement génératrice de cardinal $2n$ dont aucune sous-famille stricte ne l'est.

Exercice 117 (*Théorème de Maschke*). Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soient G un sous-groupe fini de $GL(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par tous les éléments de G. Montrer que F admet un supplémentaire stable par tous les éléments de G.

Exercice 118 (*Traces modulo p*). Soit p un nombre premier. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

1) Montrer que $\operatorname{Tr}((A+B)^p) \equiv \operatorname{Tr} A^p + \operatorname{Tr} B^p [p]$.
2) En déduire que $\operatorname{Tr} A^p \equiv \operatorname{Tr} A [p]$.
3) Soit $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = u_{n+1} + u_n$. Montrer que p divise u_p pour tout nombre premier p.

Exercice 119. Quelles sont les matrices qui sont des comatrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 120 (*Formule de Burnside*).

1) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit G un sous-groupe fini de $GL(E)$. On pose $E^G = \{x \in E,\ \forall g \in G,\ g(x) = x\}$. Montrer que
$$\dim E^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \operatorname{Tr}(g).$$
2) Soit G un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$. Pour $g \in G$, on note $F(g)$ le nombre de points fixes de g. Soit r le nombre d'orbites pour l'opération de g sur $[\![1, n]\!]$. En utilisant 1), montrer que
$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} F(g).$$
3) Retrouver directement ce résultat.

Exercice 121. Soient $\mathbb{K}$ un corps infini et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1) Montrer que l'on ne peut pas avoir $E = V_1 \cup \ldots \cup V_N$ où les V_i sont des sous-espaces stricts de E. Que se passe t-il si $\mathbb{K}$ est fini ?

2) Montrer que si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces de E de même dimension alors il existe un supplémentaire commun à tous les F_i.

Exercice 122 (*Dénombrement d'involutions*)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps fini de caractéristique différente de 2. Déterminer $|\{A \in GL_n(\mathbb{K}) \mid A^2 = I_n\}|$.

Exercice 123 (*Crochets de Lie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle.

1) Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.
2) Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice de trace nulle, alors on peut trouver $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = BC - CB = [B, C]$.

Exercice 124 (*Produits d'automorphismes de trace nulle*)**.** Soit $n \geq 2$. Déterminer les matrices de $GL_n(\mathbb{K})$ qui s'écrivent comme un produit de matrices de trace nulle.

Exercice 125 (*Isomorphismes entre groupes linéaires*)**.** Soient $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ deux corps commutatifs de caractéristique différente de 2.

1) Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{K})$ tel que pour toute matrice A de G, $A^2 = I_n$. Montrer que $|G| \leq 2^n$.
2) On suppose qu'il existe un morphisme injectif du groupe $GL_n(\mathbb{K})$ dans le groupe $GL_m(\mathbb{L})$. Montrer que $n \leq m$.
3) Existe-t-il un isomorphisme entre $GL_n(\mathbb{Q})$ et $GL_m(\mathbb{R})$? Entre $GL_n(\mathbb{R})$ et $GL_m(\mathbb{C})$?

Exercice 126 (*Un théorème de Hoffman et Singleton*)**.** Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, à coefficients dans $\{0, 1\}$, de trace nulle et telle qu'il existe $d \geq 1$ vérifiant,

$$A^2 + A - (d-1)I_n = J$$

où J est la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients valent 1. On note $U = {}^t(1, \dots, 1)$.

1) Montrer que $AU = dU$. En déduire que $n^2 = d + 1$.
2) Soient (a, b) les racines du polynôme $X^2 + X - (d-1)$. Montrer que le spectre de A est inclus dans $\{a, b, d\}$.
3) Montrer que $d \in \{1, 2, 3, 7, 57\}$. Déterminer A si $d = 1$ ou $d = 2$.

Exercice 19 ***(Décomposition de Fitting).*** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1) Montrer que les suites $(\mathrm{Im} u^k)_{k\geq 0}$ et $(\ker u^k)_{k \geq 0}$ sont d'abord strictement monotones pour l'inclusion puis constantes à partir d'un même rang $p \leq n$.
2) Montrer que la suite $(\ker u^k)_{k\geq 0}$ s'essoufle au sens où $(\dim \ker u^{k+1} - \dim \ker u^k)_{k \geq 0}$ décroît.
3) Montrer que $E = \mathrm{Im} u^p \oplus \ker u^p$.
4) En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où N est nilpotente et C inversible.

Exercice 20. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$. Que peut-on dire d'un endomorphisme u de E laissant stable tous les sous-espaces de dimension k de E ?

Exercice 21. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u_1, \dots, u_n$ des endomorphismes nilpotents de E qui commutent deux à deux. Que vaut $u_1 \circ \dots \circ u_n$?

Exercice 22. Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $C = AXB$.

Exercice 23 *(Pseudo-inverse).* Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1) Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$. On considère 3 conditions :
   (i) $f \circ g \circ f = f$.
   (ii) $g \circ f \circ g = g$.
   (iii) $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f)$.
   Montrer que si deux de ces conditions sont réalisées, alors la troisième aussi.
2) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe g tel que (i), (ii) et (iii) soient réalisées.
3) Soient $f, g, h, \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{L}(E)$ tels que
$$f \circ \tilde{f} \circ f = f, \;\; g \circ \tilde{g} \circ g = g.$$
   Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ u \circ g = h \Leftrightarrow f \circ \tilde{f} \circ h \circ \tilde{g} \circ g = h$.

Exercice 24. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\tilde{A} = {}^t\mathrm{Com}(A)$. Montrer que $\tilde{A}$ est un polynôme en A. On traitera les cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathbb{K}$ infini, $\mathbb{K}$ quelconque.

Exercice 25. Soit R un anneau de caractéristique différente de 2. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{Com}(A)$ la comatrice de A. Montrer que pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(R)^2$,
$$\mathrm{Com}(AB) = \mathrm{Com}(A)\mathrm{Com}(B).$$
On traitera les cas suivants :

1) $R = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
2) R corps quelconque.
3) R anneau intègre.

Exercice 26. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $CD = DC$. Calculer $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

Exercice 27. Soit $A = (i \wedge j)_{1 \leq i,j \leq n}$. Calculer $\det A$.

Exercice 28. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $AB = BA$ et $\det(A + B) \geq 0$. Montrer que pour tout $p \geq 1$, $\det(A^p + B^p) \geq 0$.

Exercice 29. Soient $m < n$ deux entiers naturels. Soient $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}_m[X]$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

1) Calculer le déterminant de
$$N = \begin{pmatrix} P_1(a_1) & \ldots & P_1(a_n) \\ \vdots & & \vdots \\ P_n(a_1) & \ldots & P_n(a_n) \end{pmatrix} .$$
   A quelle condition ce déterminant est-il nul ?
2) Calculer le déterminant de
$$M = \begin{pmatrix} 1^{n-1} & \ldots & n^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ n^{n-1} & \ldots & (2n-1)^{n-1} \end{pmatrix} .$$

Exercice 30. Pour $0 \leq k \leq n$, calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{k-1} & x_1^{k+1} & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{k-1} & x_n^{k+1} & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

Exercice 31. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

(i) Pour $i \neq j$, $a_{i,j} \neq 0 \Rightarrow a_{j,i} = 0$.

(ii) $(a_{i,j} \neq 0$ et $a_{j,k} \neq 0) \Rightarrow a_{i,j} \neq 0$ pour i, j, k deux à deux distincts.

Calculer $\det A$.

Exercice 32 *(Sous-espaces engendrés).*

1) Déterminer le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par les matrices nilpotentes.
2) Même question avec les matrices inversibles.
3) Même question avec les matrices de projection.
4) Même question avec les matrices orthogonales.
5) Même question avec les matrices diagonalisables.

Exercice 33 *(Première colonne d'une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$).*

1) A quelle condition une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est-elle inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$?
2) A quelle condition un vecteur de $\mathbb{Z}^n$ est-il la première colonne d'une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$?

Exercice 34 *(Un problème de cailloux...).* On dipose de $2n+1$ cailloux avec $n \geq 1$. On suppose que chaque sous-ensemble de $2n$ cailloux peut se partager en deux tas de cailloux de même masse totale. Montrer que les cailloux ont tous la même masse.

Exercice 35. Si $X \in \mathbb{Z}^n$, on note $\Lambda(X)$ le pgcd des coefficients de X. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\det A = \pm 1$.

(ii) Pour tout $X \in \mathbb{Z}^n$, $\Lambda(AX) = \Lambda(X)$.

Exercice 36 *(Opérateur 'Sweep').* Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\text{Graphe}(A)$ l'ensemble $\{(X, AX)\ ,\ X \in \mathbb{R}^n\}$.

1) Montrer que $\text{Graphe}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{2n}$ et qu'il caractérise A.
2) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-espace de $\mathbb{R}^{2n}$ soit le graphe d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3) Soient $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$ les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$ et Rot_k l'isomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ qui échange les composantes selon e_k et f_k sans toucher aux autres. A quelle condition sur A existe-t-il une matrice A' telle que $\text{Graphe}(A') = \text{Rot}_k(\text{Graphe}(A))$?
4) On note $\text{Sweep}_k(A)$ la matrice A' de la question précédente. Que dire, sous réserve d'existence à chaque étape, de $\text{Sweep}_1 \circ \ldots \circ \text{Sweep}_n(A)$?

Exercice 37. On note G l'ensemble des endomorphismes u de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2,\ \mathrm{Tr}(u(A)u(B)) = \mathrm{Tr}(AB).$$

1) Montrer que tout élément de G est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2) Montrer que G est un sous-groupe de $GL(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.
3) Déterminer les éléments $u \in G$ vérifiant $u(I_2) = I_2$.

Exercice 38. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de même rang telles que $A^2B = A$. Montrer que $B^2A = B$.

Chapitre 5

Réduction

Exercice 1. Soit χ un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$ fixé. Combien y-a-t-il de classes de similitudes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont le polynôme caractéristique est χ ?

Exercice 2. Montrer que le théorème de Cayley-Hamilton est vrai dans n'importe quel anneau commutatif A.

Exercice 3. Soient $p \in \mathcal{P}$ et $n \geq 1$. Soit $\rho : SL_2(\mathbb{F}_p) \to GL_n(\mathbb{C})$ un morphisme injectif. On souhaite montrer que $n \geq \frac{p-1}{2}$.

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{F}_p)$. Montrer que $\rho(A)$ est diagonalisable de spectre inclus dans $\mathbb{U}_p$.
2) Soit $x \in \mathbb{F}_p^*$. On note $B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}$. Montrer que $\rho(B)$ agit par permutation sur les sous-espaces propres de $\rho(A)$.
3) Conclure.

Exercice 4. Déterminer le cardinal maximal d'une famille de matrices de $GL_n(\mathbb{C})$ qui anticommutent 2 à 2.

Exercice 5 *(Lemme de Selberg)*. Soit Γ un sous-groupe de type fini [1] de $GL_n(\mathbb{Q})$. Montrer que Γ admet un sous-groupe d'indice fini [2] sans torsion [3].

Exercice 6. Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{Q})$ dont tous les éléments sont d'ordre fini. Montrer que G est fini.

Exercice 7. Caractériser les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(A) = 0$ ou $P(A) \in GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 8. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que l'on ait pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Tr}(A^k) = \mathrm{Tr}(B^k)$.

Exercice 9. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{rg}(AB - BA) \leq 1$. Montrer que A et B sont simultanément trigonalisables.

---

1. *i.e* admet une partie génératrice finie.
2. Un sous-groupe Γ_0 d'indice fini sur Γ vérifie pour tout $g, h \in \Gamma$ ($g \sim h \Leftrightarrow gh^{-1} \in \Gamma_0$) a un nombre fini de classes.
3. Un élément de torsion de Γ est un élément $g \neq I_n$ tel qu'il existe $p \geq 1$ tel que $g^p = I_n$.

Exercice 10 ***(Un lemme de Serre).***

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. On suppose que A est annulée par un polynôme complexe non nul P dont les racines sont simples et de module < 1. Montrer que $A = 0$.
2) Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Z})$. Montrer que si p est un nombre premier impair alors la réduction modulo p de $GL_n(\mathbb{Z})$ dans $GL_n(\mathbb{F}_p)$ restreinte à G est injective. Que peut-on en déduire ?

Exercice 11. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$. Soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & a_1 \\ \vdots & (0) & \vdots \\ a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} .$$

A quelle condition M est-elle diagonalisable ?

Exercice 12. Pour quelles valeurs de n existe-t-il un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ isomorphe au groupe additif $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$?

Exercice 13 ***(Équation de Sylvester).*** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. A quelle condition l'équation $AX - XB = Y$ a t-elle une solution $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour tout $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 14. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Soit $S \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que les éléments de S commutent 2 à 2. On suppose que les éléments de S possèdent un vecteur propre commun. Démontrer l'existence d'un vecteur propre commun à tous les éléments de ${}^tS$.

Exercice 15. Soient $n \geq 2$ et $p \in \mathcal{P}$. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ contient une matrice non trigonalisable.

Exercice 16. Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1) Démontrer que si $u \in \mathcal{L}(V)$ est diagonalisable, les sous-espaces vectoriels stables par u sont ceux de la forme $V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ où chaque V_i est un sous-espace d'un espace propre de u.
2) Si u est nilpotent et non nul, établir l'existence d'un sous-espace vectoriel stable par u qui n'admet pas de supplémentaire stable.

Exercice 17 ***(Un théorème de Burnside).***

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que A est nilpotente.
2) Soient G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$, $(M_i)_{1 \leq i \leq m} \in G^m$ une base de $\mathrm{Vect}(G)$ et $f : A \in G \mapsto (\mathrm{Tr}(AM_i))_{1 \leq i \leq m}$. Montrer que si $f(A) = f(B)$ alors $AB^{-1} - I_n$ est nilpotente.
3) On suppose que toutes les matrices de G sont diagonalisables, montrer que f est injective.
4) En déduire que si G est un sous-groupe d'exposant fini (il existe $p \geq 1$ tel que pour tout $g \in G$, $g^p = I_n$) de $GL_n(\mathbb{C})$, alors G est fini.

Exercice 18. Caractériser les $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaires de degré n tels que $P = \chi_A$ caractérise la classe de similitude de A.

Exercice 19 ***(Un théorème de Kronecker).***

1) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré n. Existe-t-il $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que $\chi_A = P$?
2) On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ les racines distinctes ou confondues d'un polynôme unitaire P de degré n de $\mathbb{Z}[X]$. Montrer que si $q \geq 1$,
$$P_q = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i^q) \in \mathbb{Z}[X].$$
3) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire dont toutes les racines complexes sont de module ≤ 1. Montrer que les racines non nulles de P sont des racines de l'unité.

Exercice 20. Si $(X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on note $\langle X, Y \rangle = \mathrm{Tr}({}^tXY)$.

1) Vérifier que $\langle , \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On considère pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
$$\begin{array}{cccc} \mathrm{ad}_A & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & & X & \mapsto & AX - XA \end{array}.$$

2) Calculer l'adjoint de ad_A.
3) Montrer que A est nilpotente si et seulement si $A \in \mathrm{Im}(\mathrm{ad}_A)$.
4) Montrer que A est nilpotente si et seulement si A est semblable à $2A$.

Exercice 21 ***(Matrices stochastiques (1)).*** Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices stochastiques réelles, c'est à dire les matrices $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $p_{i,j} \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1$.

1) Montrer que tous les éléments de $\mathcal{S}$ ont une valeur propre commmune.
2) $\mathcal{S}$ est-il stable par produit ?
3) Soit $P \in \mathcal{S}$. Soit λ une valeur propre complexe de A, montrer que $|\lambda| \leq 1$.

Exercice 22 ***(Matrices stochastiques (2)).*** Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Soit λ une valeur propre de A de module 1 et $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n$ vecteur propre associé.

1) Si x_i est une composante de X de module maximal, montrer que λx_i est encore une composante de X de module maximal.
2) En déduire que λ est une racine m-ème de l'unité avec $m \leq n$.
3) On suppose que pour tout i, $a_{i,i} \neq 0$. Montrer que la seule valeur propre de module 1 et 1.

Exercice 23 ***(Disques de Gershgörin).*** Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose pour $i \in [\![1, n]\!]$, $R_i = \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} |a_{i,j}|$.

1) On suppose que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{i,i}| > R_i$. Montrer que A est inversible.
2) Montrer que le spectre de A est inclus dans $\cup_{i=1}^{n} D_i$ où $D_i = \{z \in \mathbb{C},\ |z - a_{i,i}| \leq R_i\}$.
3) On suppose à nouveau que $|a_{i,i}| > R_i$ pour tout i. Montrer que
$$|\det A| \geq \prod_{i=1}^{n}(|a_{i,i}| - R_i).$$
4) On suppose maintenant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout i, $a_{i,i} > R_i$. Montrer que
$$\det A \geq \prod_{i=1}^{n}(a_{i,i} - R_i).$$

Exercice 24.

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer la décomposition de Dunford de $\exp(A)$ en fonction de celle de A.
2) Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\exp(A) = I_n$.

Exercice 25 ***(Spectre de la comatrice).*** Décrire selon les cas le spectre de $\mathrm{Com}(A)$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 26. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$. On appelle $\pi_M \in \mathbb{Q}[X]$ (resp. $\mu_M \in \mathbb{R}[X]$) le polynôme minimal de M en tant que matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ (resp. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). Montrer que $\pi_M = \mu_M$.

Exercice 27. Soit $n \geq 1$. Montrer que les éléments d'ordre fini de $GL_n(\mathbb{Z})$ sont d'ordre uniformément fini.

Exercice 28. Déterminer l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que la suite $(A^k)_{k\geq 0}$ soit bornée.

Exercice 29. Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$AB - BA = C,\ AC = CA,\ CB = BC.$$

Montrer que A, B, C sont simultanément trigonalisables et que C est nilpotente.

Exercice 30. Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3 \setminus \{0\}$ tel que $\alpha A + \beta B + \gamma C$ ait une valeur propre double.

Exercice 31. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A_f : g \in \mathcal{L}(E) \mapsto f \circ g - g \circ f$.

1) Montrer que si f est nilpotent alors A_f aussi.
2) Montrer que si f est diagonalisable alors A_f aussi. Préciser les valeurs propres de A_f en fonction de celles de f.
3) On suppose A_f diagonalisable. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 32. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est *semi-simple* si tout sous-espace de E stable par u admet un supplémentaire stable par u. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) u est diagonalisable.

(ii) χ_u est scindé et u est semi-simple.

Exercice 33. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathrm{Tr}(A^k) = 0$. Montrer que les valeurs propres de A sont de module strictement inférieur à 1.

Exercice 34.

1) Soit G un groupe fini de cardinal n. Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$.
2) Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie. Montrer qu'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que A soit isomorphe à une sous-algèbre de $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$.
3) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à n valeurs propres distinctes. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ contenant M.

Exercice 35. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

1) On pose pour $(x, y) \in E^2$, $V(x, y) = (u(x), u(y))$. Établir l'existence d'un sous-espace vectoriel non trivial de E^2, stable par V et ne s'écrivant pas $F \times F'$ où F et F' sont des sous-espaces de E stables par u.
2) On suppose que les polynômes minimaux de u et v sont premiers entre eux. On pose $V : (x, y) \in E^2 \mapsto (u(x), v(y))$. Montrer qu'un sous-espace vectoriel de E^2 stable par V est de la forme $F \times F'$ où F est stable par u et F' est stable par v.

Exercice 36. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) A est une isométrie linéaire pour une norme N.

(ii) Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\{A^k X \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$ est borné.

(iii) A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ avec des valeurs propres de module 1.

Exercice 37. Soient $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. On munit $\mathbb{C}^n$ d'une norme $\|\cdot\|$ et on pose pour $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k = \frac{A^k x}{\|A^k x\|}.$$

Étudier la convergence de la suite $(u_k)_{k \geq 0}$.

Exercice 38. Quel est le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ engendré par les matrices diagonalisables ?

Exercice 39. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On rappelle l'inégalité de Hölder : si $p, q > 1$ vérifient $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a pour $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $r_i = \sum\limits_{1 \leq j \leq n,\, j \neq i} |a_{i,j}|$ et $r_i = \sum\limits_{1 \leq j \leq n,\, j \neq i} |a_{j,i}|$. Soit $\alpha \in [0, 1]$.

1) On suppose que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{i,i}| > r_i^{\alpha} c_i^{1-\alpha}$. Montrer que A est inversible.
2) On note pour $i \in [\![1, n]\!]$, $D_i = D_f\left(a_{i,i}, r_i^{\alpha} c_i^{1-\alpha}\right)$. Montrer que le spectre de A est inclus dans la réunion des disques D_i.
3) On suppose les D_i deux à deux disjoints. Montrer que chacun des D_i contient exactement une valeur propre de A.

Exercice 40.

a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{Sp}(M) \subset \{0\}$ si et seulement si M est nilpotente. Est-ce toujours le cas pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
b) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des matrices dont le spectre est inclus dans $\{0\}$. Montrer que $\dim(V) \leq \frac{n(n-1)}{2}$. Cette majoration est-elle optimale ?

Chapitre 6

Espaces euclidiens

Exercice 1. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne.

1) Trouver les applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ telles que pour tout $(u, v) \in (\mathbb{R}^2)^2$,

$$u \perp v \Rightarrow f(u + v) = f(u) + f(v).$$

2) Trouver les applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continues telles que pour tout $(u, v) \in (\mathbb{R}^2)^2$,

$$u \perp v \Rightarrow f(u + v) = f(u) + f(v).$$

Exercice 2. Soit E un espace euclidien et $(a, b) \in E^2$. Déterminer les bornes supérieures et inférieures de

$$f : x \mapsto \frac{\langle x, a\rangle\langle x, b\rangle}{\|x\|^2}.$$

Exercice 3. Soit E un espace euclidien et $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, vérifiant

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow \|x_i - x_j\| \geq 2.$$

Soit B une boule fermée de rayon R contenant tous les x_i. Montrer que

$$R \geq \sqrt{\frac{2(n-1)}{n}}.$$

Exercice 4 *(Familles obtuangles)*. Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\langle u_i, u_j\rangle < 0$ pour tout $i \neq j$.

1) Montrer que $p - 1$ vecteurs parmi eux forment toujours une famille libre de $\mathbb{R}^n$.
2) Montrer que l'on ne peut pas trouver plus de $n + 1$ vecteurs vérifiant ces conditions.
3) Montrer que l'on peut en trouver $n + 1$.

Exercice 5.

1) (Décomposition QR) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple (Q, R) avec $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et R triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs tel que $A = QR$.
2) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes. Montrer que

$$|\det(A)| \leq \|C_1\| \ldots \|C_n\|$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Étudier le cas d'égalité.

3) En déduire, si l'on pose $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$, qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de n telle que
$$|\det(A)| \leq C\|A\|_\infty^n n^{\frac{n}{2}}.$$

Exercice 6. Soient $\mathcal{E}$ une partie de $\mathbb{R}^n$ et A un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, tels que $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $Av \in \mathcal{E}$ et $v - Av \in \mathcal{E}^\perp$. Que dire de A et de $\mathcal{E}$?

Exercice 7 *(Caractérisation des normes euclidiennes).* Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :

(i) La norme $\|\cdot\|$ est euclidienne, c'est à dire issue d'un produit scalaire.

(ii) Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$.

(iii) Pour tout $(x, y) \in E^2$, $t \mapsto \|x + ty\|^2$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

(iv) La restriction de $\|\cdot\|$ à tout plan P inclus dans E est euclidienne.

(v) Pour tout $x \in E$, $H(x) = \left\{y \in E,\ \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2\right\}$ est un ensemble stable par homothéthie.

Exercice 8 *(Polynômes d'Hermite).* On pose pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,
$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right).$$

1) Montrer que H_n est une fonction polynomiale de degré n.
2) Montrer que si $n \in \mathbb{N}$,
$$H_{n+2} = 2XH_{n+1} - 2(n + 1)H_n.$$
3) Montrer que si $n \in \mathbb{N}$,
$$H_n'' - 2XH_n' + 2nH_n = 0.$$
4) On pose $q_n(x) = H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$q_n'' + (2n + 1 - x^2)q_n = 0.$$
5) Calculer pour $m, n \in \mathbb{N}$
$$\int_{\mathbb{R}} q_m(t)q_n(t)dt.$$

Exercice 9 *(Matrices de Gram).*

1) Soient $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs d'un espace préhilbertien réel E.
   a) Montrer que la matrice $A = (\langle x_i, x_j\rangle)_{1\leq i,j\leq n}$ est symétrique positive et de même rang que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$. A est la matrice de Gram de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$, on la note $G(x_1, \ldots, x_n)$.
   b) On suppose $(x_1, \ldots, x_n)$ libre et on pose $F = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$. Soit $x \in E$, montrer que
$$d(x, F)^2 = \frac{\det G(x, x_1, \ldots, x_n)}{\det G(x_1, \ldots, x_n)}.$$
   c) On suppose de plus F orienté. Montrer que
$$\det G(x_1, \ldots, x_n) = [x_1, \ldots, x_n]^2.$$
2) Soit $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive. Montrer que M est la matrice de Gram d'une famille $(v_1, \ldots, v_n)$.

Exercice 10. Soit E un espace euclidien de dimension n. Soient $(x_1, \dots, x_p), (y_1, \dots, y_p)$ deux familles de p vecteurs de E. Montrer que $G(x_1, \dots, x_p) = G(y_1, \dots, y_p)$ si et seulement si il existe $f \in \mathcal{O}(E)$ tel que $y_k = f(x_k)$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.

Exercice 11. Soit $m \geq 2$. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de n existe-t-il $(x_1, \dots, x_m)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tel que les x_i soient unitaires et $\langle x_i, x_j \rangle = \lambda$ pour tout $i \neq j$?

Exercice 12. Soit E un espace euclidien.

1) Montrer que $u \in \mathcal{O}(E)$ peut s'écrire comme produit d'au plus r refléxions où $r = \mathrm{rg}(u - \mathrm{Id}_E)$. En déduire que les refléxions engendrent $\mathcal{O}(E)$.
2) Montrer que les retournements engendrent $S\mathcal{O}(E)$ lorsque $\dim E = 3$.

Exercice 13. Déterminer les applications $f : \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, pour tout $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$,

$$f(OX) = Of(X)^tO.$$

Exercice 14. Soit $n \geq 2$. Soit $\mathcal{L}$ un endomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, pour tout $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{L}(OS^tO) = O\mathcal{L}(S)^tO.$$

Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{L}(S) = \mu S + \lambda \operatorname{Tr}(S) I_n.$$

Exercice 15. Soit V un sous-espace de dimension finie de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. On suppose que pour tout $f \in V$, $\exists u \in [0,1]$ tel que $f(u) > 0$. Montrer qu'il existe un polynôme réel, strictement positif sur $[0,1]$ tel que pour tout $f \in V$,

$$\int_0^1 f(x)P(x)dx = 0.$$

Exercice 16. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée et $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de vecteurs tels que $\|e_k - f_k\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$. Montrer que $(f_1, \dots, f_n)$ est une base. Le résultat subsiste-t-il si l'on suppose l'inégalité large ?

Chapitre 7

Endomorphismes symétriques

Exercice 1. Montrer que la matrice $H_n = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ est symétrique définie positive.

Exercice 2. Soit E un espace euclidien de norme euclidienne associée $\|\cdot\|$. On note $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ la norme triple subordonnée à $\|\cdot\|$. On note $B = \{u \in \mathcal{L}(E)\ ,\ |\!|\!|u|\!|\!| \leq 1\}$. Montrer que les points extrémaux de B sont exactement les éléments de $\mathcal{O}(E)$.

Exercice 3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP$ ait tous ses termes diagonaux égaux.

Exercice 4 ***(Décomposition de Choleski - Décomposition QR).***

1) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice P triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $A = {}^tPP$.
2) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple (Q, R) où $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et R triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictements positifs tel que $A = QR$.

Exercice 5 ***(Décomposition en valeurs singulières).*** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que ${}^tAA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2) Montrer qu'il existe $U, V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale à coefficients positifs tels que $A = UDV$.
3) En déduire la décomposition polaire.
4) Réciproquement, déduire de la décomposition polaire la décomposition en valeurs singulières.
5) Montrer que A est somme d'au plus n matrices de rang 1.

Exercice 6 ***(Dilatation isométrique d'une contraction).*** Soit E un espace euclidien de dimension $2n$. Soit F un sous-espace de dimension n. Soient enfin $u \in \mathcal{L}(F)$ et p la projection orthogonale de E sur F. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout $x \in F$, $\|u(x)\| \leq \|x\|$.

(ii) Il existe $v \in \mathcal{O}(E)$ tel que $u = p \circ v_{|F}$.

Exercice 7 ***(Inégalité d'Hadamard).***

1) Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que
$$\det A \leq \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

2) Soit E euclidien de dimension n. Soit $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$. On désigne par $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de f et on note $\mathcal{A}$ l'ensemble des bases orthonormées de E. Montrer que
$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \inf_{(e_1,\dots,e_n)\in\mathcal{A}} \prod_{i=1}^{n} \langle f(e_i), e_i\rangle.$$

Exercice 8. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est positive si et seulement si pour tout $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(AB) \geq 0$.

Exercice 9. Soit $(A, B) \in (\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))^2$. Montrer que $\mathrm{Tr}((AB - BA)^4) \geq 0$. Que dire du cas d'égalité ?

Exercice 10. Montrer que l'application $\Phi : A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto \max \mathrm{Sp}(A)$ est convexe.

Exercice 11. Soient E un espace euclidien et p, q deux projecteurs orthogonaux de E. Montrer que pq est diagonalisable et que son spectre est inclus dans $[0, 1]$.

Exercice 12. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\alpha > 0$. On note $\mathcal{S} = \{M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})\ ,\ \det M \geq \alpha\}$. Montrer que
$$\inf_{S\in\mathcal{S}} \mathrm{Tr}(AS) = n\left(\alpha \det A\right)^{1/n}.$$

Exercice 13 ***(Inégalité de Kantorovich).*** Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On note $\lambda_{\min}$ (resp. $\lambda_{\max}$) la plus petite (resp. plus grande) valeur propre de A. Montrer que si $X \in \mathbb{R}^n$,
$$({}^tXX)^2 \leq ({}^tXAX)({}^tXA^{-1}X) \leq \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}} + \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}}\right)^2 ({}^tXX)^2.$$

Exercice 14. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice symétrique définie positive de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que si $p > 0$, on a
$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p\right)^{1/p} \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,k}^p\right)^{1/p} \quad \text{lorsque } p \geq 1$$
et
$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,k}^p\right)^{1/p} \quad \text{lorsque } p < 1.$$

Exercice 15. Soit E un espace euclidien. Soient $f, g \in \mathcal{S}(E)$. On suppose que pour tout $x \in E$,
$$|\langle x, f(x)\rangle| \leq \langle x, g(x)\rangle.$$
Montrer que $|\det f| \leq \det g$.

Exercice 16 ***(Théorème du minimax).*** Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $f \in \mathcal{S}(E)$ de valeurs propres $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$. On note $(e_i)_i$ une base de vecteur propres orthonormée avec $f(e_i) = \lambda_i e_i$.

1) Pour tout $h \in [\![1, n]\!]$, on note $E_h = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_h)$ et $F_h = \mathrm{Vect}(e_h, \ldots, e_n)$. On note f_1 et f_2 les endomorphismes de E_h et F_h respectivement, induits par f. Caractériser λ_h connaissant f_1 et f_2.
2) Soit $\mathcal{A}_h$ l'ensemble des sous-espaces de dimension h de E. Montrer que

$$\lambda_h = \min_{F \in \mathcal{A}_h} \left(\max_{x \in F,\, \|x\|=1} \langle f(x), x \rangle \right) = \max_{F \in \mathcal{A}_{n-h+1}} \left(\min_{x \in F,\, \|x\|=1} \langle f(x), x \rangle \right).$$

Exercice 17 ***(Théorème de perturbation de Weyl).*** Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de spectres respectifs $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ et $\mu_1 \leq \ldots \leq \mu_n$. Démontrer que pour tout $p \in [\![1, n]\!]$,

$$|\lambda_p - \mu_p| \leq \|\!|A - B|\!\|$$

où $\|\!|\cdot|\!\|$ désigne la norme triple subordonnée à la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 18. Soient E un euclidien de dimension n et $f \in \mathcal{S}(E)$ de valeurs propres $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Soit G un hyperplan de E. Soient p la projection orthogonale sur G et g l'endomorphisme induit sur G par $p \circ f$.

1) Montrer que $g \in \mathcal{S}(G)$.
2) Soient $\lambda'_1 \leq \ldots \leq \lambda'_{n-1}$ les valeurs propres de g. Montrer que

$$\lambda_1 \leq \lambda'_1 \leq \ldots \leq \lambda'_{n-1} \leq \lambda_n.$$

Exercice 19. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ des réels tels que

$$\lambda_1 < \mu_1 < \ldots < \mu_{n-1} < \lambda_n.$$

Prouver l'existence d'une matrice symétrique d'ordre n de bloc supérieur gauche $\mathrm{Diag}(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1})$ et de spectre $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

Exercice 20 ***(Théorème de majoration de Schur).***

1) Soient E un espace euclidien de dimension n, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E, $u \in \mathcal{S}(E)$ et $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de u. On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de u dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Démontrer que pour $p \in [\![1, n]\!]$,

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_p \leq a_{11} + \ldots + a_{pp}.$$

2) Soient $a, b \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que

$$\mathrm{Tr}(e^b(b - a) - e^b + e^a) \geq 0.$$

Exercice 21 ***(Inégalités de Ky-Fan).*** Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On range leurs valeurs propres,

$$\lambda_1(A) \geq \ldots \geq \lambda_n(A), \text{ et } \lambda_1(B) \geq \ldots \geq \lambda_n(B).$$

1) Montrer que

$$\lambda_1(A + B) \leq \lambda_1(A) + \lambda_1(B).$$

2) Montrer plus généralement que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(A + B) \leq \sum_{i=1}^{k} \left(\lambda_i(A) + \lambda_i(B) \right).$$

Exercice 22. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On note $0 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ (resp. $0 \leq \mu_1 \leq \ldots \leq \mu_n$) les valeurs propres de A (resp. B). Montrer que

$$\mathrm{Tr}(AB) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i.$$

Exercice 23 *(Un théorème de Liapounov).* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est *stable* si ses valeurs propres sont de partie réelle strictement négative. Soit $W \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que

$$A \text{ est stable } \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ telle que } {}^tAV + VA = -W.$$

Exercice 24 *(Théorème de Perron-Frobenius).* Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice symétrique réelle à coefficients strictement positifs. On note ρ le rayon spectral de A. Montrer que ρ est valeur propre simple de A et que le sous-espace propre associé est engendré par un vecteur colonne à coefficients strictements positifs.

Exercice 25 *(Caractérisation de Sylvester des matrices définies positives).* Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice symétrique réelle. Montrer que

$$M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ D_k = \det(m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k} > 0.$$

Exercice 26. Soit $(A_k)_{k \geq 0}$ une suite de matrices symétriques de taille n. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On suppose que les matrices $A - A_k$ et $A_{k+1} - A_k$ sont toutes positives. Montrer que la suite $(A_k)_{k \geq 0}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 27.

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer que si X est solution de $X' = AX$ alors X est bornée.
2) Soit $(A, B) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$. On suppose que $f : t \in \mathbb{R} \mapsto |\!|\!| e^{tA} - e^{tB} |\!|\!|$ est bornée sur $\mathbb{R}$ où $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ désigne la norme triple subordonnée à la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$. Que dire de A et B ?
3) Soit $H(A) = \{P \in GL_n(\mathbb{R}) \mid t \mapsto |\!|\!| Pe^{tA} - e^{tA} |\!|\!| \text{ est bornée sur } \mathbb{R}\}$. Montrer que $H(A)$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.
4) Que représente $H(A)$?

Exercice 28 *(Inégalité de Bergström).* Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ deux matrices symétriques définies positives. On considère $A_1 = (a_{i,j})_{2 \leq i,j \leq n}$ et $B_1 = (b_{i,j})_{2 \leq i,j \leq n}$. Montrer que

$$\frac{\det A}{\det A_1} + \frac{\det B}{\det B_1} \leq \frac{\det(A+B)}{\det(A_1 + B_1)}.$$

Exercice 29.

1) Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathbb{R}^n$. Trouver le minimum de $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $J(X) = {}^tXAX - 2{}^tYX$.
2) Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On suppose que $A - B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que

$$B^{-1} - A^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$

Exercice 30.

1) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$ assez proche de 0,

$$\ln(\det(I_p + xA)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \operatorname{Tr}(A^n) x^n.$$

2) Soient $A, B \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R})$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (i) $AB = 0$.
   (ii) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\det(xA + yB + I_p) = \det(xA + I_p)\det(yB + I_p)$.

Exercice 31. Déterminer les composantes connexes par arcs de $GL_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 32. Déterminer les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs.

Exercice 33. Montrer que les endomorphismes d'algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec la transposition sont les applications de la forme $M \mapsto OMO^{-1}$ où $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 34. Soit G un sous-groupe de $SL_n(\mathbb{R})$. on suppose G compact et $S\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset G$. Déterminer G.

Exercice 35. Soit G un sous-groupe de $SL_n(\mathbb{R})$. On suppose $S\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subsetneq G \subset SL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $G = SL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 36.

1) Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
2) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = B^2$.
3) Montrer que $f : A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \mapsto A^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $df(A)$ est injective.
4) Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \mapsto \sqrt{A}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 37.

a) Un endomorphisme diagonalisable d'un espace euclidien E est-il diagonalisable en base orthonormée ?
b) Même question pour un endomorphisme trigonalisable.

Chapitre 8

Topologie matricielle

Exercice 1. Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ tel qu'il existe $k \in [0, 2[$ tel que

$$\forall M \in G,\ \|\!|M - I_n|\!\| \leq k$$

où $\|\!|\cdot|\!\|$ est la norme triple associée à la norme hermitienne sur $\mathbb{C}^n$. Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $M \in G$, $M^q = I_n$.

Exercice 2. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{C}^n$ et $\|\!|\cdot|\!\|$ sa norme subordonnée. Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que,

$$\forall g \in G,\ \|\!|g - I_n|\!\| < \sqrt{3}.$$

Montrer que $G = \{I_n\}$.

Exercice 3 ***(Topologie des classes de similitude).***

1) Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la classe de similitude est bornée.
2) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathcal{S}(A)$ sa classe de similitude.
   a) Montrer que si $A \in GL_n(\mathbb{C})$ alors $\overline{\mathcal{S}(A)} \subset GL_n(\mathbb{C})$.
   b) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathcal{S}(A)$ est une partie fermée.
3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si $0 \in \overline{\mathcal{S}(A)}$.

Exercice 4.

1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n. Montrer que le polynôme P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geq |\mathrm{Im} z|^n$.
2) Montrer que $\mathcal{T}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ trigonalisable}\}$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3) Déterminer l'adhérence de l'ensemble $\mathcal{D}_n$ des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puis l'adhérence de l'ensemble Δ_n des matrices réelles ayant n valeurs propres distinctes.

Exercice 5 ***(Une preuve du théorème de Caley-Hamilton).***

1) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $R \geq 0$ tel que $\forall r \geq R$,

$$A^{k-1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (re^{it})^k (re^{it} I_n - A)^{-1} dt.$$

2) En déduire le théorème de Caley-Hamilton.

Exercice 6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable à n valeurs propres distinctes. Montrer que $\chi_A(A) = 0$. En déduire une nouvelle preuve du théorème de Caley-Hamilton sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 7. Soit $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \exists p \in \mathbb{N}^*,\ M^p = I_n\}$.

1) Déterminer l'adhérence de $\mathcal{A}$.
2) Quelles sont les composantes connexes par arcs de $\mathcal{A}$?

Exercice 8 *(Autour des endomorphismes cycliques).*

1) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$. On définit $I = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = 0\}$ et $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(u)(x) = 0\}$.
   a) Montrer l'existence de polynômes unitaires non nuls μ_u et μ_x tels que
   $$I = \mu_u\mathbb{K}[X],\ \ I_x = \mu_x\mathbb{K}[X].$$
   b) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\mu_x = \mu_u$.
   c) On rappelle que $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit *cyclique* s'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E. Montrer que
   $$u \text{ est cyclique } \Leftrightarrow \mu_u = \chi_u.$$
2) Trouver l'adhérence et l'intérieur de l'ensemble des matrices cycliques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
3) Montrer que l'ensemble des matrices cycliques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
4) Quels sont les points de continuité de $A \mapsto \mu_A$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où l'on prendra sans perte de généralité $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On suppose A diagonalisable, on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A et $n_1, \ldots, n_r$ leurs multiplicités respectives. On note enfin $\mathcal{C}(A)$ le commutant de A et $\mathbb{K}[A] = \{P(A)\ ,\ P \in \mathbb{K}[X]\}$.

1) Calculer les dimensions de $\mathcal{C}(A)$ et $\mathbb{K}[A]$.
2) Établir les équivalences suivantes :
$$\dim \mathcal{C}(A) = n \Leftrightarrow \dim \mathbb{K}[A] = n \Leftrightarrow r = n \Leftrightarrow \mathcal{C}(A) = \mathbb{K}[A].$$
3) On ne suppose plus A diagonalisable. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A pour que $\mathbb{K}[A] = \mathcal{C}(A)$.

Exercice 10. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathcal{C}(A)$ le commutant de A. Montrer que l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\dim \mathcal{C}(A) = n$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 11. Trouver l'adhérence et l'intérieur de $V_r = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{rg}(M) = r\}$.

Exercice 12 *(Autour du rayon spectral).* Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$ le rayon spectral de A.

1) Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (i) Il existe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{C}^n$ telle que $|||A||| < 1$ avec $|||\cdot|||$ norme triple subordonnée à $\|\cdot\|$.
   (ii) $\rho(A) < 1$.
   (iii) $(A^k)_{k\geq 0}$ converge vers 0.
2) Montrer que $\sum A^k$ converge si et seulement si $\rho(A) < 1$.
3) Soit N une norme quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que
$$N(A^k)^{1/k} \underset{k\to+\infty}{\rightarrow} \rho(A).$$

Exercice 13 ***(Semi-normes invariantes par similitude).***

1) Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer qu'il n'existe pas sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de norme $\|\cdot\|$ invariante par similitude au sens où pour tout $(A,P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R})$,
$$\|PAP^{-1}\| = \|A\|.$$
2) Montrer que $A \mapsto |\operatorname{Tr}(A)|$ est une semi-norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ invariante par similitude.
3) Déterminer toutes les semi-normes invariantes par similitude sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 14 ***(Sous-groupes à paramètre de $GL_n(\mathbb{C})$).*** Déterminer tous les morphismes de groupe continus de $(\mathbb{R},+) \to (GL_n(\mathbb{C}),\times)$.

Exercice 15. Soit $\varphi : \mathbb{U} \to GL_n(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes continu.

1) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{U}$, $\det \varphi(z) = 1$.
2) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{U}$, le spectre de $\varphi(z)$ est inclus dans $\mathbb{U}$.
3) Achever la description de φ.

Exercice 16. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables. On suppose que $\exp(A) = \exp(B)$. Montrer que $A = B$.

Exercice 17. Montrer que l'exponentielle induit un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 18 ***(Algèbre de Lie de $SO_n(\mathbb{R})$).*** Déterminer $\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ,\ \forall t \in \mathbb{R}\ \exp(tA) \in SO_n(\mathbb{R})\}$.

Exercice 19.

1) Montrer que l'exponentielle réalise une bijection entre les matrices nilpotentes et les matrices unipotentes (matrices de la forme $I_n + N$ où N est nilpotente) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2) Quelle est l'image de $M \mapsto \exp(M)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui même ?

Exercice 20. Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $N \in \mathcal{N}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique élément N_k de $\mathcal{N}$ tel que
$$\left(I_n + \frac{N_k}{k}\right)^k = I_n + N.$$
Étudier la limite de $(N_k)_{k\geq 0}$.

Exercice 21 ***(Image de l'exponentielle).*** Montrer que
$$\exp\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right) = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \exists P \in GL_n(\mathbb{R}),\ M = P^2\right\}.$$

Exercice 22 *(Formules de Lie).* On pose pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $p \in \mathbb{N}^*$, $f_p(A) = \left(I_n + \frac{A}{p}\right)^p$.

1) Montrer que $(f_p)_{p\geq 1}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une limite que l'on précisera.
2) Montrer successivement que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
$$\lim_{p\to+\infty} \left(\exp\left(\frac{A}{p}\right)\exp\left(\frac{B}{p}\right)\right)^p = \exp(A+B)$$
et
$$\lim_{p\to+\infty} \left(\exp\left(\frac{A}{p}\right)\exp\left(\frac{B}{p}\right)\exp\left(\frac{-A}{p}\right)\exp\left(\frac{-B}{p}\right)\right)^{p^2} = \exp(AB-BA).$$
3) Soient G un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{G} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tM) \in G\}$. Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par quelle autre opération $\mathcal{G}$ est-il stable ?

Exercice 23. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des projecteurs sur E. Déterminer les composantes connexes par arcs de $\mathcal{P}$.

Exercice 24. Soit $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $(\mathcal{P})$ la propriété : $m_{1,1}, \ldots, m_{n,n}$ sont les valeurs propres de M comptées avec multiplicité.

1) Déterminer les réels a tels que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ a & -a & -a-2 \end{pmatrix}$ vérifie $(\mathcal{P})$.
2) Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si M vérifie $(\mathcal{P})$ alors M est diagonale.
3) Déterminer l'intérieur dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ,\ M \text{ vérifie } (\mathcal{P})\}$.

Exercice 25.

1) Donner une fonction $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ continue et non nulle telle que si M est trigonalisable alors $f(M) = 0$.
2) Existe-t-il une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constante sur chaque classe de similitude ?
3) Existe-t-il une fonction continue $f : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ continue non constante telle que f soit constante sur chaque classe d'équivalence de $\sim$ définie par : pour tout $(M, N) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,
$$M \sim N \Leftrightarrow \exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } M = {}^tPNP\ ?$$
4) Même question en remplaçant $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ par $GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 26 *(Théorème de Browne).* On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme $\|\cdot\|$. On note $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ la norme triple induite sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $\rho(A) \leq |\!|\!|A|\!|\!|$ où $\rho(A) = \max\limits_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$.
2) On suppose que $|\!|\!|A|\!|\!| < 1$. Montrer que $I_n + A \in GL_n(\mathbb{R})$. En déduire que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 27. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |m_{i,j}|$.

a) Montrer que φ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
b) Montrer que pour tout $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, $\varphi(MN) \leq \varphi(M)\varphi(N)$.
c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Montrer qu'il existe une norme sous-multiplicative N telle que $N(A) = \max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$.
d) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(B)} |\lambda|$ est la borne inférieur des $N(B)$ lorsque N parcourt l'ensemble des normes sous-multiplicatives sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Chapitre 9

Espaces vectoriels normés et topologie

Exercice 1 ***(Une généralisation du théorème de Korovkin).*** Soit X un compact de $\mathbb{R}^n$. On note $E = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues réelles sur X, muni de $\|\cdot\|_\infty$ et $\mathcal{L}_C(E)$ l'espace des endomorphismes continus de E. On dit qu'une fonction $f \in E$ est *positive* si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in X$. On dit qu'un opérateur $L \in \mathcal{L}_C(E)$ est *positif* s'il stabilise l'ensemble des fonctions positives. Enfin, si $f \in E$, on pose $Z(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$.

1) Soit $(\alpha, \beta) \in E^2$ tel que $Z(\beta) \subset Z(\alpha)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $C > 0$ vérifiant,
$$\forall x \in X,\ \alpha(x) \leq \varepsilon + C\beta(x).$$

2) Pour $f \in E$, on pose $\Delta(f) = \{(x, y) \in X^2 \,|\, f(x) = f(y)\}$. Une fonction positive $\gamma \in \mathcal{C}(X^2, \mathbb{R})$ est dite *majorante* pour f si $Z(\gamma) \subset \Delta(f)$. Dans ce cas, on définit $\gamma_t : X \to \mathbb{R}$ par $\gamma_t(x) = \gamma(t, x)$ pour $x \in X$. Soient $f \in E$, γ majorante pour f, $(L_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{L}_C(E))^{\mathbb{N}}$ une famille d'opérateurs positifs tels que :

   (i) $(L_n(1))_n$ converge uniformément vers 1 sur X.

   (ii) $L_n(\gamma_t)(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ uniformément en t.

   Montrer que $(L_n(f))$ converge uniformément vers f sur X.

3) En déduire le théorème de Weierstrass.

4) Soit K compact convexe de $\mathbb{R}^n$. Soient $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ et $\xi \in K$. On définit pour $n \geq 1$ et $x \in K$,
$$f_n(x) = \int_0^1 ns^n f((1-s)\xi + sx)ds.$$
   Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur K.

Exercice 2 ***(Théorèmes de relèvement).*** Dans cet exercice, on note $p : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, définie pour $t \in \mathbb{R}$ par $p(t) = e^{it}$.

1) Démontrer que p réalise un homéomorphisme de $]-\pi, \pi[$ sur $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$. Exhiber l'homéomorphisme réciproque.

Étant donnés X une partie non vide d'un espace vectoriel normé E et $f : X \to \mathbb{U}$, on dit que f est *relevable* s'il existe une application $\tilde{f} \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ telle que $f = p \circ \tilde{f}$. On dit alors que $\tilde{f}$ est un *relèvement* de f.

2) Soient g et h deux relèvements de $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{U})$. Démontrer que si X est connexe par arcs, alors il existe un entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $x \in X$,
$$g(x) - h(x) = 2p\pi.$$

3) Soit $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{U})$. On suppose que $f(X) \subset \mathbb{U} \setminus \{-1\}$. Montrer que f est relevable.

Soit X une partie d'un espace vectoriel normé E. Soient $f, g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{U})$. On dit que f est *homotope* à g, s'il existe une application $F \in \mathcal{C}(X \times [0,1], \mathbb{U})$ telle que pour tout $x \in X$,

$$F(x, 0) = f(x) \text{ et } F(x, 1) = g(x).$$

On suppose dans les questions 4 à 6 incluse X compact. On se propose de montrer que si f est homotope à g, alors

$$f \text{ est relevable } \Leftrightarrow g \text{ est relevable.}$$

On suppose à présent f homotope à g.

4) Justifier l'existence d'un entier $n \geq 1$ tel que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \forall x \in X,\ \left| F\left(x, \frac{k+1}{n}\right) - F\left(x, \frac{k}{n}\right) \right| < 2.$$

5) On pose pour un tel entier n, pour $k \in [\![0, n]\!]$, et pour $x \in X$, $F_k(x) = F\left(x, \frac{k}{n}\right)$. Démontrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, F_{k+1}/F_k est relevable.

6) Conclure.

On suppose encore que X est une partie compacte. On ajoute l'hypothèse suivante : X est étoilée par rapport à un de ses éléments a, cela signifie que pour tout $x \in X$, $[a, x] \subset X$.

7) Démontrer que toute application continue $f : X \to \mathbb{U}$ est homotope à l'application constante égale à $f(a)$.

8) En déduire que toute application continue $f : X \to \mathbb{U}$ est relevable.

9) Montrer que si $f : \overline{D} \to \mathbb{C}^*$, où $\overline{D}$ désigne le disque unité fermé de $\mathbb{C}$, alors il existe une application continue $g : \overline{D} \to \mathbb{C}$ telle que $f = e^g$.

Exercice 3 ***(Un cas particulier du théorème de Brouwer).*** On utilisera les résultats de l'exercice précédent. On note $X = \overline{D}$.

1) Démontrer qu'il ne peut exister une application continue $g : X \to \mathbb{U}$ telle que $\forall z \in \mathbb{U}$, $g(z) = z$.

2) En déduire le cas particulier du théorème de Brouwer suivant : Toute application continue $f : X \to X$ possède au moins un point fixe.

   Indication : On raisonnera par l'absurde en considérant

$$\begin{array}{rccc} h & : & X & \to & \mathbb{U} \\ & & z & \mapsto & \dfrac{z - f(z)}{|z - f(z)|} \end{array}.$$

   On montrera en particulier que $h|_{\mathbb{U}}$ est relevable et homotope à $\mathrm{Id}|_{\mathbb{U}}$.

Exercice 4 ***(L'exponentielle complexe n'est pas un carré).*** L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas d'application continue $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $\exp = f \circ f$. On raisonne donc par l'absurde en supposant qu'une telle application existe.

1) Montrer que $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^*$.

2) Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{C}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ telle que

$$f = e^g.$$

3) En déduire l'existence d'un entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$(g \circ f)(z) = z + 2i\pi p.$$

4) Conclure.

Exercice 5. On considère l'espace vectoriel normé $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_1$ définie par

$$\forall f \in E,\ \|f\|_1 = \int_0^1 |f|.$$

On fixe un entier $d \geq 1$. On note V_d le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré au plus d sur $[0,1]$.

1) On considère $g, h \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On suppose que l'ensemble des zéros de g, noté $Z(g)$, est réunion finie d'intervalles. On considère

$$\begin{array}{rccc} G & : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \|g+th\|_1 \end{array}.$$

Montrer que G est dérivable en 0 si et seulement si $\int_{Z(g)} |h| = 0$. Vérifier qu'alors,

$$G'(0) = \int_{[0,1]\setminus Z(g)} h(x)\mathrm{signe}(g(x))dx.$$

2) On fixe $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et on considère

$$\begin{array}{rccc} F & : V_d & \to & \mathbb{R} \\ & P & \mapsto & \|f-P\|_1 \end{array}.$$

a) Montrer que cette fonction admet un minimum.
b) Montrer que si P réalise le minimum, alors $f-P$ s'annule au moins $d+1$ fois.
c) En déduire l'unicité du point en lequel le minimum de F est atteint.

Exercice 6. Soient $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ et $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On note

$$R_{m,n} = \left\{ \frac{P}{Q} \mid (P,Q) \in \mathbb{R}_m[X] \times \mathbb{R}_n[X]\ ,\ Q \text{ sans zéros sur } [0,1] \right\}.$$

Montrer qu'il existe $R \in R_{m,n}$ qui minimise $\|R-f\|_\infty$.

Exercice 7. On note,

$$P^+ = \left\{ P \in \mathbb{R}[X]\ ,\ P = \sum_k a_k X^k \mid \forall k,\ a_k \geq 0 \right\}.$$

Déterminer $\overline{P^+}^\infty$, adhérence de P^+ pour la norme infinie dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

Exercice 8 *(Bases d'Auerbach).* Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 1$ muni de la norme $\|\cdot\|$. Montrer qu'il existe une base de V formée de vecteurs unitaires, dont la base duale est elle aussi formée de vecteurs unitaires pour la norme induite par $\|\cdot\|$ sur V^*.

Exercice 9 *(Théorème de prolongement de Tietze).* Soient E un espace vectoriel normé et $A \subset E$ un fermé non vide. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ continue telle que $\inf_A f = 1$ et $\sup_A f = 2$. On introduit $g : E \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x)$ si $x \in A$ et

$$g(x) = \inf_{a\in A} \frac{f(a)\|x-a\|}{d(x,A)} \text{ si } x \notin A.$$

1) Calculer la borne inférieure et la borne supérieure de g sur E.
2) g est-elle continue ?

Exercice 10. Soit D le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$. On pose $f : D \to \mathbb{R}$ une application continue telle que pour tout $z \in \mathbb{U}$, f possède un prolongement continu $f_z : D \cup \{z\} \to \mathbb{R}$. Montrer que f possède un prolongement continu à $\overline{D}$.

Exercice 11. Soit $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On définit $\Phi : f \in E \to \varphi \circ f \in E$. Étudier la continuité de Φ.

Exercice 12 *(Hyperplan d'appui).* Soient E un espace euclidien et C un convexe fermé non vide. On note p la projection sur C.

1) Montrer que p est continue.
2) Soit c un point de la frontière de C. Montrer qu'il existe un hyperplan d'appui de C en c, c'est à dire un hyperplan affine H de E passant par c et tel que C soit contenu dans l'un des demi-espaces fermés délimités par H.

Exercice 13 *(Théorème de Krein-Milman).* Soient E un espace euclidien et K un compact convexe non vide de E. Un point a de K est dit extrémal lorsque $K \setminus \{a\}$ est encore convexe. Autrement dit, a n'est pas le milieu de deux points distincts de K.

1) Soit $a \in K$. On suppose que a est dans un hyperplan d'appui H de K. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :
   (i) a est un point extrémal de K.
   (ii) a est un point extrémal du compact convexe $K \cap H$.
2) Montrer que K est égal à l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Exercice 14 *(Théorème de Cantor-Bendixon).* Soit K un fermé de $\mathbb{R}^n$. On dit que $x \in K$ est un *point de condensation* si, pour tout voisinage V de x, $V \cap K$ est non dénombrable. On note C_K l'ensemble des points de condensation de K.

1) Donner des exemples où $C_K = \emptyset$, $C_K = K$, C_K non vide et distinct de K.
2) Montrer que C_K est fermé. Montrer que $K \setminus C_K$ est au plus dénombrable et que C_K est sans point isolé.

Exercice 15. Soit K une partie bornée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une unique boule fermée $B_f(b_K, r_K)$ de rayon minimal contenant K.

Exercice 16 *(Fonctions dilatantes).* Soit X un compact non vide d'un espace vectoriel normé E. Soit $f : X \to X$ une dilatation au sens où

$$\forall (x,y) \in X^2,\ \|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|.$$

1) Soit $a \in X$. Montrer que a est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
2) Montrer que f est une isométrie.
3) Montrer que f est bijective.

Exercice 17 ***(Précompacité).*** Soient E un espace vectoriel normé et $A \subset E$ non vide.

1) Montrer qu'il y a équivalence entre :

   (i) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\exists (a_i)_{1 \leq i \leq n} \in A^n$ telle que $A \subset \cup_{i=1}^{n} B(a_i, \varepsilon)$.

   (ii) De toute suite d'éléments de A, on peut extraire une suite de Cauchy.

2) Un ensemble A de E vérifiant (i) est dit *précompact.* Montrer que A est compact si et seuelement si il est précompact et complet.

Exercice 18 ***(Propriété de Borel-Lebesgue).*** Soit (K, d) un compact métrique.

1) On suppose $K = \cup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ où $\mathcal{O}_i$ est ouvert. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, r) \subset \mathcal{O}_i$.

2) En déduire :

$$(K, d) \text{ compact } \Rightarrow \text{Si } K = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i, \ \exists J \subset I \text{ finie, telle que } K = \bigcup_{j \in J} \mathcal{O}_j.$$

3) En déduire le théorème de Heine.

4) Étudier la réciproque.

Exercice 19 ***(Un analogue discret du théorème d'Ascoli).*** Soit $E = \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ muni de

$$\|u\|_1 = \sum_{i=0}^{+\infty} |u_i|, \text{ où } u \in E.$$

Une partie X de E est dite *équisommable* si,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall u \in X, \ \sum_{i=N+1}^{+\infty} |u_i| \leq \varepsilon.$$

Montrer que si X est une partie de E,

$$X \text{ compacte } \Leftrightarrow X \text{ fermée, bornée et équisommable.}$$

Exercice 20. Soient K un compact de $\mathbb{R}^2$ et $\|\cdot\|$ un norme sur $\mathbb{R}^2$. Soit $\varepsilon > 0$. Si A est une partie finie de K, on dit que A ε-recouvre K lorsque $K \subset \cup_{a \in A} B_f(a, \varepsilon)$.

1) Montrer qu'il existe un entier $N(\varepsilon)$ tel que toute partie A qui ε-recouvre K soit de cardinal supérieur ou égal à $N(\varepsilon)$ et tel qu'il existe une partie A de cardinal $N(\varepsilon)$ qui ε-recouvre K.

2) On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de cardinal $N(\varepsilon)$ qui ε-recouvrent K. Montrer que l'application

$$D : A \in \mathcal{A} \mapsto \sum_{(x,y) \in A^2} \|x - y\|$$

   atteint son minimum.

Exercice 21 ***(Adhérence de l'ensemble des polynômes simplement scindés de*** $\mathbb{R}_n[X]$***).*** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et Ω_n l'ensemble des polynômes de degré n de $\mathbb{R}[X]$ simplement scindés sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que Ω_n est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Déterminer l'adhérence de Ω_n dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 22.

1) Quel est le nombre maximal de composantes connexes par arcs du complémentaire de la réunion de n droites de $\mathbb{R}^2$?
2) Pour $n, d \in \mathbb{N}^*$, on note $c(n, d)$ le nombre maximal de composantes connexes par arcs du complémentaire de la réunion de n hyperplans de $\mathbb{R}^d$. Calculer $c(n, d)$.

Exercice 23 ***(Théorème de Sunyer y Balaguer).*** Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ où I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in I$,

$$\exists n_x \in \mathbb{N} \text{ tel que } f^{(n_x)}(x) = 0.$$

Montrer que f est polynomiale. On pourra utiliser le théorème de Baire, que l'on redémontrera ; ou bien étudier la contraposée de la proposition recherchée.

Exercice 24 ***(Ensembles de Julia).*** Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré au moins 2. Pour $n \geq 1$, on note $P_n = P \circ \ldots \circ P$ (n fois). On note K_P l'ensemble des nombres complexes z tels que $(P_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

1) Déterminer K_{X^2}.
2) Montrer que K_P est non vide.
3) Montrer que K_P est compact.
4) Montrer que $\mathbb{C} \setminus K_P$ est connexe par arcs.

Exercice 25. Soit E un espace vectoriel normé. Soit $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$. Montrer que $\mathrm{Adh}(u_n)$ est fermé.

Exercice 26. Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $E = \left\{z \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{k=1}^n |z_k|^2 = 1,\ \sum_{k=1}^n a_k|z_k|^2 = 1\right\}$. Montrer que E est connexe par arcs.

Exercice 27.

1) Soient $n, m \geq 1$. Trouver une fonction non continue $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ telle que l'image par f de tout compact est un compact.
2) Soient $n, m \geq 1$. Trouver une fonction non continue $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ telle que l'image par f de tout connexe par arcs est un connexe par arcs.
3) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ qui envoie tout compact sur un compact et tout connexe par arcs sur un connexe par arcs. Étudier la continuité de f.

Exercice 28. Soient $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}_+^*)$, $p \geq 1$ et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\frac{\left\|\int_0^1 f\right\|^p}{\left(\int_0^1 g\right)^{p-1}} \leq \int_0^1 \frac{\|f\|^p}{g^{p-1}}.$$

Exercice 29 ***(Théorème de Carathéodery).*** Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ et $C(X)$ son enveloppe convexe.

1) Montrer que tout point de $C(X)$ est barycentre à coefficients positifs d'une famille de $n+1$ points de X.
2) En déduire que si X est compacte, alors $C(X)$ l'est aussi.

Exercice 30 ***(Mesure de compacité).*** Soit K un compact d'un espace vectoriel normé réel E. On note $N(K,\varepsilon)$ le plus petit nombre de boules ouvertes de rayon ε centrées en un point de K nécessaires pour recouvrir K.

1) On prend $E = \mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne et K la boule unité fermée de E. Après avoir encadré finement $N(K,\varepsilon)$, calculer
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\ln N(K,\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}.$$
2) On prend $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie et $K = \{f \in E | f(0) = 0 \text{ et } f 1\text{-lipschitzienne}\}$. La compacité de K est une conséquence directe du théorème d'Ascoli. Après avoir encadré finement $N(K,\varepsilon)$, calculer
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\ln\ln N(K,\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Exercice 31. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue. Soit $(z_n)_{n\geq}$ définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = f(z_n)$.

1) On suppose que $(z_n)_{n\geq 0}$ admet exactement une valeur d'adhérence α. Montrer que $f(\alpha) = \alpha$.
2) Que dire si $(z_n)_{n\geq 0}$ admet exactement p valeurs d'adhérence ?

Exercice 32. Soient $n \geq 2$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue.

1) On suppose f surjective. Montrer que l'ensemble des zéros de f n'est pas compact.
2) On suppose désormais f convexe et que l'ensemble des zéros de f est un compact non vide. Montrer que
$$f(x) \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Exercice 33.

1) Déterminer les morphismes continus de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2) Déterminer les morphismes continus de $(GL_n(\mathbb{C}), \times)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exercice 34.

1) Déterminer les morphismes continus de $(\mathbb{U}, \times)$ dans $(\mathbb{U}, \times)$.
2) Déterminer les morphismes continus de $(\mathbb{U}, \times)$ dans $(GL_n(\mathbb{C}))$.

Exercice 35. On munit $\mathbb{R}^n$ de son unique topologie d'espace normé. Montrer qu'une partie B de $\mathbb{R}^n$ est la boule unité fermée d'une norme de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si B est convexe, compacte, symétrique par rapport à l'origine et d'intérieur non vide.

Exercice 36. Existe-t-il une norme N sur $\mathbb{R}^2$ telle que les seules isométries linéaires de $(\mathbb{R}^2, N)$ soient id et $-$id ?

Exercice 37. Énoncer le théorème d'équivalence des normes en dimension finie. Montrer que ce résultat tombe en défaut sur un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension ≥ 2.

Exercice 38 ***(Théorème de Kakutani).*** Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et K un compact convexe non vide de E. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u(K) \subset K$. Pour $n \geq 1$, on considère

$$u_n = \frac{1}{n}\left(\mathrm{Id}_E + \ldots + u^{n-1}\right).$$

1) Montrer que $H = \bigcap_{n \geq 1} u_n(K) \neq \emptyset$.
2) Montrer que $x \in H \Leftrightarrow u(x) = x$.

Chapitre 10

Analyse de première année

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe des constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)| \leq a|x| + b.$$

Que penser de la réciproque ?

Exercice 2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré impair et soit $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$,

$$|f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|.$$

Que dire de f ?

Exercice 3 ***(Points fixes).***

1) Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si $f(I) \subset I$ ou si $I \subset f(I)$, alors f admet un point fixe dans I.
2) Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction croissante. Montrer que f admet un point fixe.
3) Soient $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ deux fonctions continues vérifiant $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

Exercice 4. Déterminer les applications $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ qui tendent vers 0 en $+\infty$ et vérifient $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$f(xf(y)) = yf(x).$$

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}_+^*$ croissante telle que pour tout $m, n \geq 1$, $f(m)f(n) = f(mn)$. Montrer qu'il existe $\alpha \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = n^{\alpha}$.

Exercice 6. Existe-t-il $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ remplissant les deux conditions ci-dessous ?

(*i*) $\forall \alpha > 0$, $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(x^{\alpha}\right)$.

(*ii*) $\forall \beta > 0$, $(\ln x)^{\beta} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(f(x)\right)$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{\infty}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note

$$\operatorname{ord}_x(f) = \inf\{k \in \mathbb{N} \,,\ f^{(k)}(x) \neq 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}.$$

On note $Z(f) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \operatorname{ord}_x(f) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Montrer que

$$Z(f') \geq Z(f) - 1.$$

Exercice 8.

1) Trouver toutes les fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{3^n}.$$
2) Même question avec la condition pour tout $x \in [0,1]$,
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}.$$
3) Pour $c \in]0,1[$, déterminer les fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in [0,1]$,
$$f(x) = c\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}.$$
Traiter le cas $c = 2$.

Exercice 9. Existe-t-il $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\frac{f(x)^2 f'(x)^2}{1+|x|} + f''(x) = -1 \ ?$$

Exercice 10. Trouver les applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que
$$f + f \circ f + f \circ f \circ f = 3\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}.$$

Exercice 11. Déterminer les applications continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = f(x)f(y).$$

Exercice 12. Déterminer les applications continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. En déduire une description complète des sous-groupes finis des homéomorphismes de $\mathbb{R}$.

Exercice 13. Soit Γ un sous-groupe des homéomorphismes de $\mathbb{R}$ dans lui même. On suppose que pour tout $f \in \Gamma$, si $f \neq \mathrm{i}_d$, alors f n'a pas de points fixes. Montrer que Γ est abélien.

Exercice 14 *(Fonctions à variations bornées).* Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. A toute subdivision $\sigma = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ de $[a,b]$, on associe la *variation totale* de f sur σ définie par
$$V(f,\sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|.$$
On pose aussi $V_a^b(f) = \sup_{\sigma} V(f,\sigma) \in [0,+\infty]$ que l'on appelle *variation* de f sur $[a,b]$. Si $V_a^b(f)$ est finie, on dit que f est à *variations bornées* sur $[a,b]$.

1) Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ alors f est à variations bornées sur $[a,b]$, calculer alors sa variation. Examiner les cas où f est lipschitzienne ou monotone.
2) Comparer $V_a^b(f+g)$ et $V_a^b(f) + V_a^b(g)$.
3) Pour $c \in]a,b[$, comparer $V_a^b(f)$ et $V_a^c(f) + V_c^b(f)$.
4) Montrer que f est à variations bornées sur $[a,b]$ si et seulement si f est somme de deux fonctions monotones sur $[a,b]$.

Exercice 15 ***(Un théorème de relèvement).*** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ continue. Montrer qu'il existe $r, \theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $f = re^{i\theta}$.

Exercice 16. Pour $n \geq 1$, on note τ_n le nombre de diviseurs positifs de n. Si $x \in [1, +\infty[$, on pose $F(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \tau_n$.

1) Trouver un équivalent simple de F lorsque x tend vers $+\infty$.
2) Affiner le résultat précédent avec un développement asymptotique en $\mathcal{O}(\sqrt{x})$.
3) Soit $\alpha > 0$, montrer que

$$\frac{\tau_n}{n^\alpha} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 17 ***(Lemme de Croft).*** Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0$, $f(nx) \to 0$ lorsque n tend vers $+\infty$.

1) Montrer que si f est uniformément continue, alors $\lim_{+\infty} f = 0$.
2) Donner un exemple de fonction f vérifiant la condition de l'énoncé mais qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$.
3) Le résultat persiste-t-il si l'on suppose simplement f continue ?

Exercice 18 ***(Un théorème de Whitney).*** Démontrer que tout fermé de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des zéros d'une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 19. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $]0,1[$ avec $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $x \in]0,1[$ tel que

$$|f''(x)| \geq 4.$$

Exercice 20. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1) Montrer que

$$\int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) dx_1 \ldots dx_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f\left(\frac{1}{2}\right).$$

2) Étudier de même la convergence de la suite de terme général

$$\int_{[0,1]^n} f\left((x_1 \ldots x_n)^{1/n}\right) dx_1 \ldots dx_n.$$

Exercice 21 ***(Irrationalité de e^p, de π^2).*** On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$.

1) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.
2) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En considérant $\int_0^1 p^{2n+1} e^{px} f_n(x) dx$, montrer que e^p est irrationnel.
3) Par une méthode similaire, montrer que π^2 est irrationnel.

Exercice 22 ***(Inégalités de Kolmogorov).***

1) Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$ et on pose $M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, $M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$. Montrer que

$$M_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}.$$

2) Soit $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $M_k = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$. On suppose que M_0 et M_n sont finis. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, M_k est fini et

$$M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{k}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}.$$

Exercice 23 ***(Fonctions mid-convexes).*** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

1) Montrer que f est convexe.
2) On ne suppose plus f continue mais on suppose désormais f bornée sur I ouvert. Montrer que f est convexe.

Exercice 24 ***(Théorème de Darboux).*** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

Exercice 25 ***(Théorème de Glaeser).*** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, positive sur $\mathbb{R}$.

1) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur f pour que $\sqrt{f}$ soit dérivable sur $\mathbb{R}$.
2) On suppose que $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$. Soient $\alpha > 0$ et $M(\alpha) = \sup_{t\in[-2\alpha, 2\alpha]} |f''(t)|$. En utilisant une formule de Taylor, montrer que pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$,

$$f'^2(x) \leq 2f(x)M(x).$$

3) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $\sqrt{f}$ soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 26. Soient $f_1, \ldots, f_n$ n fonctions convexes sur $[0, 1]$. On suppose que $h = \sup(f_1, \ldots, f_n) \geq 0$. Montrer qu'il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ tel que

$$\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n \geq 0.$$

Exercice 27. Déterminer un équivalent de $u_n = \left(\prod_{k=1}^n k^k\right)^{1/n}$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 28. On considère la suite définie par récurrence par $x_0 > 0$ et $x_{n+1} = x_n + \ln(n + x_n^2)$. Déterminer un équivalent puis un développement asymptotique à deux termes de x_n.

Exercice 29. Déterminer

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} \, , \int_0^{2\pi} \prod_{k=0}^n \cos(kx) dx \neq 0 \right\}.$$

Exercice 30 ***(Inversion de Möbius).*** Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux. On lui associe la fonction $\widehat{f} : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour $x \geq 1$ par $\widehat{f}(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} f\left(\frac{x}{k}\right)$.

1) Montrer que pour $x \geq 1$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\lfloor x \lfloor} \mu(n) \widehat{f}\left(\frac{x}{n}\right)$$

où μ désigne la fonction de Möbius.

2) On suppose qu'il existe $A, B, C \in \mathbb{R}$ et $\beta \in]0, 1[$ tels que

$$\widehat{f}(x) \underset{x \to +\infty}{=} Ax(\ln x)^2 + Bx \ln x + Cx + \mathcal{O}\left(x^{\beta}\right).$$

Montrer que

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{=} 2Ax \ln x + \mathcal{O}(x).$$

Exercice 31. Soit $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.

1) Montrer que P_n admet au plus une racine réelle.
2) Soit a_n l'unique zéro de P_{2n+1}. Étudier la limite de $(a_n)_{n \geq 0}$.
3) Déterminer un équivalent de a_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 32 ***(Dérivation d'équivalent).*** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et croissante. On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f$.

1) On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x^{\alpha}}{\alpha}.$$

Montrer que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^{\alpha - 1}$.

2) On suppose que

$$F(x) \underset{x \to +\infty}{=} \frac{x^2}{2} + o(x).$$

Montrer que $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} x + o\left(\sqrt{x}\right)$.

Exercice 33. Déterminer un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de

$$u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor.$$

Exercice 34. Calculer

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{\ln k}{k}.$$

Exercice 35. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k, \text{ et (lorsque cela a un sens) } R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k.$$

1) On suppose que $\sum u_n$ diverge. Montrer que

$$\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha} \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

2) On suppose que $\sum u_n$ converge. Montrer que

$$\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha} \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha < 1.$$

Exercice 36. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui décroît vers 0. Déterminer la nature de $\sum \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n}$.

Exercice 37. Soit $\alpha > 0$. Pour $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^{i\alpha}.$$

Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 38. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_1 > 0$, et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}$.

1) Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. Dans ce cas, on note ℓ sa limite.
2) Pour $\alpha > 1$, déterminer un équivalent de $u_n - \ell$ en $+\infty$.
3) Pour $\alpha \in]0,1[$, déterminer un équivalent de u_n en $+\infty$.

Exercice 39. Caractériser les suites positives $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$,

$$\sum u_n \text{ converge } \Rightarrow \sum \lambda_n u_n \text{ converge.}$$

Exercice 40 ***(Critère de Raabe-Duhamel).*** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Étudier selon les valeurs de α la nature de $\sum u_n$.
Soient $a, b > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ tels que pour tout $n \geq 0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}.$$

Lorsque $\sum u_n$ converge, calculer sa somme.

Exercice 41. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $i \neq j$, $|z_i - z_j| \geq 1$. Montrer que $\sum \frac{1}{z_n^3}$ converge. A t-on toujours convergence de $\sum \frac{1}{|z_n|^2}$?

Exercice 42. Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$.

1) Quelle est la nature de $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$?
2) Même question pour $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2 \ln n}$.
3) Même question pour $\sum \frac{\sigma(n)}{n^m}$ où $m \geq 3$.

Exercice 43 *(Inégalité de Hardy).* Établir l'existence d'une constante $K > 0$ telle que pour toute suite $(a_n)_{n\geq 1}$ de réels strictement positifs avec $\sum \frac{1}{a_n}$ convergente, on ait

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1 + \ldots + a_n} \leq K \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}.$$

On pourra commencer par établir pour $n \geq 1$,

$$\frac{n}{a_1 + \ldots + a_n} \leq \frac{4}{n(n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}.$$

Quelle est la plus petite valeur possible pour K ?

Exercice 44 *(Inégalité de Carleman).* Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout suite série convergente à termes positifs $\sum a_n$, on ait

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_1 \ldots a_n)^{1/n} \leq C \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Quelle est la plus petite valeur possible pour C ?

Exercice 45. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour toute série $\sum a_n$ convergente on ait $\sum f(a_n)$ convergente.

Exercice 46. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f(n) = n \times \ln(n) \times \ln(\ln(n)) \times \ldots \times \ln^{(k_n)}(n)$ où $\ln^{(k)}$ désigne le logarithme itéré k fois et où k_n est le plus grand entier naturel k tel que $\ln^{(k)}(n) \geq 1$. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{f(n)}$?

Exercice 47 *(Critère de condensation de Cauchy).* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ décroissante et de limite nulle.

1) Soit $p \geq 2$ un entier. Montrer que
$$\sum u_n \text{ converge } \iff \sum p^n u_{p^n} \text{ converge.}$$
2) Montrer que si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum \min\left(u_n, \frac{1}{n}\right)$ aussi.
3) Montrer que $\sum \frac{1}{p_n}$ converge où p_n désigne le n-ème entier naturel non nul dont l'écriture décimale ne comporte pas de 9.

Exercice 48 *(Théorème de Riemann).* Soit $\sum a_n$ une série réelle semi-convergente. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que $\sum a_{\sigma(n)}$ soit convergente de somme α.

Exercice 49. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $b_n = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ et que la série $\sum a_n$ converge. Étudier la nature de $\sum a_n^{b_n}$.

Exercice 50. Soit $\sum a_n$ une série complexe absolument convergente. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k = 0.$$

Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle.

Exercice 51. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Montrer que

$$\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p} \text{ diverge.}$$

Exercice 52. Pour $n \geq 2$, on note q_n le plus grand diviseur premier de n. Étudier la nature de $\sum \frac{1}{nq_n}$.

Exercice 53. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Montrer qu'il existe une partie finie $I \subset [\![1, n]\!]$, telle que

$$\left|\sum_{i\in I} z_i\right| \geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

On introduira pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$S(\theta) = \left\{j \in [\![1, n]\!],\ \theta - \frac{\pi}{2} \leq \arg(z_j) \leq \theta + \frac{\pi}{2}\right\}$$

ainsi que $f : \theta \in \mathbb{R} \mapsto \left|\sum_{j\in S(\theta)} z_j\right|$. On minorera f et on intègrera sur $[0, 2\pi]$.

Exercice 54. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^*$. On note pour $k \in [\![1, n]\!]$, $z_k = \rho_k e^{i\theta_k}$. Notons enfin $I_n = \mathcal{F}([\![1, n]\!], \{-1, 1\})$.

1) Montrer que

$$\max_{\varepsilon\in I_n}\left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon(k) z_k\right| = \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{n} p_k|\cos(\theta_k - \theta)|.$$

2) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k| \leq \frac{\pi}{2}\max_{\varepsilon\in I_n}\left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon(k) z_k\right|.$$

3) Montrer que la constante $\frac{\pi}{2}$ est optimale.

Exercice 55 *(Suites de Rudin-Shapiro).* Pour $n \geq 1$, on note

$$\alpha_n = \inf_{(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_{n-1})\in\{-1,1\}^n}\left\{\max\left\{\left|\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k z^k\right|,\ z \in \mathbb{U}\right\}\right\}.$$

1) Montrer que $\alpha_n \geq \sqrt{n}$.

On définit deux suites de polynômes, $(P_n)_{n\geq 0}$ et $(Q_n)_{n\geq 0}$ en posant $P_0 = Q_0 = 1$ et pour $n \geq 0$, $P_{n+1} = P_n + X^{2^n} Q_n$ et $Q_{n+1} = P_n - X^{2^n} Q_n$.

2) Montrer que P_n et Q_n sont de degré $2^n - 1$. Montrer que $P_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} r_k X^k$ où les r_k ne dépendent pas de n et sont dans $\{-1, 1\}$.
3) Calculer $\max\{|P_n(z)|,\ z \in \mathbb{U}\}$.
4) Montrer que $\alpha_n = \mathcal{O}\left(\sqrt{n}\right)$.

Exercice 56. Soient $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ et $M = \sup\{|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k z_k| \ , \ (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n\}$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^n |z_k| \leq 2M.$$

Exercice 57. Soit $(\lambda_n)_{n\geq 0} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ croissante telle que $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$. On suppose que pour tout $t > 0$,

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda_n t} < +\infty$$

et qu'il existe $a, A > 0$ tels que $\lim_{t\to 0^+} t^a S(t) = A$.

1) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue. On suppose qu'il existe $b > 0$ tel que $e^{tb} f(t) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$. Montrer que

$$\lim_{t\to 0^+} t^a \sum_{n=0}^{+\infty} f(\lambda_n t) = \frac{A}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} s^{a-1} f(s) ds.$$

2) En déduire un équivalent lorsque $\lambda \to +\infty$ de

$$N(\lambda) = |\{n \in \mathbb{N} \ , \ \lambda_n \leq \lambda\}|.$$

Exercice 58. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) \underset{h\to+\infty}{\longrightarrow} +0.$$

Montrer que f est affine.

Exercice 59. Soient $a \in \mathbb{R}$ et, pour $n \geq 0$, $u_n = n(an! - \lfloor an! \rfloor)$. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement si $a \in \mathbb{N}e + \mathbb{Q}$.

Exercice 60. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que

$$\|f'\|_\infty \leq \frac{2}{b-a} \|f\|_\infty + \frac{b-a}{2} \|f''\|_\infty.$$

Exercice 61. Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite réelle telle que $x_1 = 1$ et pour tout $n \geq 1$,

$$x_{n+1} = x_n + \frac{a}{(x_1 \dots x_n)^{1/n}}.$$

1) Déterminer la limite de $(x_n)_{n\geq 1}$.
2) Déterminer la limite de la suite de terme général $\frac{x_n}{\ln n}$.

Exercice 62 *(Une réciproque au théorème de Heine).* Énoncer et démontrer le théorème de Heine. Réciproquement, quels sont les sous-ensembles $H \subset \mathbb{R}$ tels que toute fonction continue $f : H \to \mathbb{R}$ soit uniformément continue ?

Exercice 63. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $g_\alpha : x \mapsto f(x+\alpha) - f(x)$ est polynomiale. Montrer que les polynômes g_α où $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ont même degré ou qu'ils sont constants.

Exercice 64 ***(Un théorème de Benjamini et Shamov).*** Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ une bijection lipschitzienne et de réciproque lipschitzienne. Montrer que l'une des deux applications $x \mapsto f(x) - x$ ou $x \mapsto f(x) + x$ est bornée.

Exercice 65. Déterminer les applications $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^1 \frac{f(x+t)-f(x)}{t^2} dt$ converge.

Exercice 66. On note H le groupe des homéomorphismes de $[0, 1]$ sur lui-même. Soit $(f, g) \in H^2$. On suppose que les seuls points fixes de f et g sont 0 et 1. Montrer qu'il existe $h \in H$ tel que $f \circ h = h \circ g$.

Exercice 67. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue à gauche en tout point. Montrer que l'ensemble des points de continuité de f est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 68. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle vérifiant pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $a_{i+j} \leq a_i + a_j$. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$a_n \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i}.$$

Exercice 69. Existe-t-il une suite réelle $(a_n)_{n\geq 0}$ bornée et divergente telle que pour tout $n \geq 1$,

$$|2a_n - a_{n+1} - a_{n-1}| \leq \frac{1}{n^2}?$$

Exercice 70. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ telle que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Existe-t-il $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ convexe telle que $g \geq f$ et $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$?

Chapitre 11

Intégration

Exercice 1 ***(Méthode de Laplace (1)).*** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose qu'une des dérivées de f est non nulle en 0. Pour $\lambda > 0$, on définit

$$I(\lambda) = \int_0^1 (1-t^2)^\lambda f(t)dt.$$

Déterminer un équivalent de I en $+\infty$.

Exercice 2 ***(Méthode de Laplace (2)).***

1) Soient $\Phi :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, croissante, et $h : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue ($-\infty < a < b \leq < +\infty$). Soit $\xi \in]a,b[$ tel que $h(\xi) \neq 0$ et $\Phi'(\xi) \neq 0$. Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. On pose pour n suffisament grand,
$$I_n = \int_a^{\xi+\alpha\frac{\ln n}{n}+\frac{\beta}{n}} h(t)e^{n\Phi(t)}dt.$$
Déterminer un équivalent de I_n en $+\infty$.
2) Soit $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$. Pour n impair, on note $-x_n$ l'unique racine réelle de P_n. Trouver un développement asymptotique de x_n sous la forme
$$x_n = \xi n + \alpha \ln n + \beta + o(1).$$

Exercice 3. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}_+^*)$. Pour $\alpha > 0$, on pose

$$I(\alpha) = \left(\int_0^1 f^\alpha\right)^{1/\alpha}.$$

Déterminer les limites de I en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 4. Pour $x > 1$, on pose
$$f(x) = \int_1^{+\infty} e^{t^x}dt.$$

1) Montrer que f est bien définie et étudier sa continuité.
2) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 5 ***(Formule des résidus).*** Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ avec $\deg P \leq \deg Q - 2$. On suppose que Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} dt = i\pi \sum_{\alpha \in \Omega} \varepsilon(\alpha)\mu(\alpha)$$

où Ω est l'ensemble des pôles de $F = \frac{P}{Q}$, $\varepsilon(\alpha)$ est le signe de la partie imaginaire de α et $\mu(\alpha)$ le coefficient de $\frac{1}{X-\alpha}$ dans la décomposition en éléments simples de F. En déduire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt.$$

Exercice 6. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f, f_n : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues par morceaux et intégrables sur I. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I.

1) On suppose que pour tout $n \geq 0$, $f_n \geq 0$. Montrer que

$$\int_I |f_n - f| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff \int_I f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f.$$

2) Donner un contre-exemple si l'on ne suppose plus les f_n positives.

3) Montrer que

$$\int_I |f_n - f| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff \int_I |f_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I |f|.$$

Exercice 7 ***(Inégalité de Weyl).*** Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f' et $x \mapsto xf(x)$ sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} f^2 \leq 2\sqrt{\int_0^{+\infty} t^2 f^2(t)dt}\sqrt{\int_0^{+\infty} f'^2(t)dt}.$$

Exercice 8 ***(Inégalités de Hölder et Minkowski).*** Soient $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1) Soient $a, b \geq 0$ et $\mu > 0$. Montrer que

$$ab \leq \frac{(a\mu)^p}{p} + \frac{(b/\mu)^q}{q}.$$

2) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}^+$ continues par morceaux telles que f^p et g^q soient intégrables sur I. Montrer que fg est intégrable sur I avec

$$\int_I fg \leq \left(\int_I f^p\right)^{1/p} \left(\int_I g^q\right)^{1/q}.$$

3) Soient $f, g : I \to \mathbb{R}^+$ continues par morceaux telles que f^p et g^p soient intégrables sur I. Montrer que $(f+g)^p$ est intégrable sur I avec

$$\left(\int_I (f+g)^p\right)^{1/p} \leq \left(\int_I f^p\right)^{1/p} + \left(\int_I g^p\right)^{1/p}.$$

Exercice 9 ***(Inégalité de Kolmogorov).*** Soit $f : \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ avec f et f'' de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que f' est de carré intégrable.
2) Montrer que
$$\left(\int_{\mathbb{R}} f'^2\right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f''^2\right).$$
3) Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et de limites nulles en $\pm\infty$.

Exercice 10 ***(Inégalité de Hardy).*** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On définit pour $x \in]0,1]$ $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f$. On pose aussi $F(0) = f(0)$.

1) Montrer que F est continue sur $[0,1]$.
2) Montrer que
$$\int_0^1 F^2 \leq 4\int_0^1 f^2.$$
3) Montrer plus généralement que si $p \geq 2$,
$$\left(\int_0^1 |F|^p\right)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1}\left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p}.$$

Exercice 11 ***(Inégalité de Van der Corput).*** Montrer qu'il existe une suite $(c_k)_{k\geq 1}$ de réels positifs vérifiant,

(i) $\forall a < b$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ vérifiant $|\varphi'| \geq 1$ et φ' monotone, $\forall \lambda > 0$,
$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}dx\right| \leq \frac{c_1}{\lambda}.$$

(ii) $\forall a < b$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq 2$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}^{k+1}([a,b],\mathbb{R})$ vérifiant $|\varphi^{(k)}| \geq 1$, $\forall \lambda > 0$,
$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}dx\right| \leq \frac{c_k}{\lambda^{1/k}}.$$

Exercice 12 ***(Inégalité de Hilbert).*** Soient $f, g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continues par morceaux.

1) On suppose f, g de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que
$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(y)}{x+y}dxdy \leq \pi\sqrt{\int_0^{+\infty} f^2}\sqrt{\int_0^{+\infty} g^2}.$$
Montrer que π est une constante optimale.
2) Plus généralement, si $p, q > 1$ vérifient $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ avec f^p et g^q intégrables, montrer que
$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(y)}{x+y}dxdy \leq \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}\left(\int_I f^p\right)^{1/p}\left(\int_I g^q\right)^{1/q}.$$
On pourra utiliser l'inégalité de Hölder et le résultat suivant : si $(x,y) \in]0,1[^2$, et si $B(x,y) = \int_0^1 t^x(1-t)^y dt$, alors
$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Exercice 13. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ de carré intégrable. Soit $g : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto f(x) - 2e^{-x}\int_0^x e^t f(t)dt$. Montrer que g est de carré intégrable et que

$$\int_{\mathbb{R}^+} g^2 = \int_{\mathbb{R}^+} f^2.$$

Exercice 14 *(Fonction maximale de Littlewood).* Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ bornée. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, on définit

$$m_f(x,t) = \frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t} f(u)du \text{ et } M_f(x) = \sup_{t>0} m_f(x,t).$$

1) Vérifier que $f(x) \leq M_f(x) \leq \|f\|_\infty$.
2) On suppose f uniformément continue. Montrer que M_f est continue.
3) Montrer que M_f est continue.
4) On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M_f = \lambda f$. Montrer que f est constante.
5) Montrer que $f \underset{\pm\infty}{\rightarrow} 0 \Leftrightarrow M_f \underset{\pm\infty}{\rightarrow} 0$.
6) On suppose f intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$. Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} xM_f(x) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(u)du.$$

7) On suppose f T-périodique où $T > 0$. On définit une suite de fonction $(f_n)_{n\geq 0}$ par $f_0 = f$ et si $n \geq 0$, $f_{n+1} = M_{f_n}$. Étudier la convergence de $(f_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 15.

1) Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

2) Soient $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers pairs et $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers. On suppose que ces deux suites tendent vers $+\infty$ et que pour tout i, $\mu_i \leq n_i$. On suppose enfin que

$$\frac{\mu_i - \frac{n_i}{2}}{\sqrt{n_i}} \underset{i\to+\infty}{\rightarrow} \lambda > 0.$$

Déterminer un équivalent de $\binom{n_i}{\mu_i}$ lorsque $i \to +\infty$.

Exercice 16 *(Suites équiréparties (1)).* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in [0,1]^{\mathbb{N}^*}$. Pour $0 \leq a < b \leq 1$, on pose

$$S_n(a,b) = |\{k \in [\![1,n]\!] \mid u_k \in [a,b]\}|.$$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est *équirépartie* si pour tout $[a,b] \subset [0,1]$ avec $a < b$,

$$\frac{S_n(a,b)}{n} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} b - a.$$

1) Montrer que si $(u_n)_{n\geq 1}$ est équirépartie alors $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite dense de $[0,1]$. Que dire de la réciproque ?

2) Pour $n \geq 1$, on pose

$$D_n = \sup_{0 \leq a < b \leq 1} \left| \frac{S_n(a,b)}{n} - (b-a) \right|, \quad \text{et } D_n^* = \sup_{0 < \alpha < 1} \left| \frac{S_n(0,\alpha)}{n} - \alpha \right|.$$

Montrer que $D_n^* \leq D_n \leq 2D_n^*$.

3) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est équirépartie si et seulement si

$$D_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

Exercice 17 ***(Suites équiréparties (2)).*** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in [0,1]^{\mathbb{N}^*}$. Pour $0 \leq a < b \leq 1$, on pose

$$X_n(a,b) = |\{k \in [\![1,n]\!] \mid u_k \in [a,b]\}|.$$

Prouver l'équivalence entre les propositions suivantes :

(i) $\frac{X_n(a,b)}{n} \underset{n \to +\infty}{\to} b - a$ pour tout $(a,b) \in [0,1]^2$.

(ii) $\forall f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(u_k) = \int_0^1 f.$$

(iii) $\forall p \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i p u_k} = 0.$$

Exercice 18. Soit H le demi-plan des nombres complexes de partie réelle strictement positive. On pose pour $z \in H$,

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

On suppose qu'il existe $z \in H$ tel que $\Gamma(z) = 0$.

1) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$,

$$\int_0^1 \left(\ln \left(\frac{1}{u} \right) \right)^{z-1} P(u) du = 0.$$

2) Que peut-on en conclure ?

Exercice 19. Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ continue. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $I_k = \int_{-1}^{1} f(t) t^k dt$ et pour $n \geq 3$, on pose

$$a_n = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t + \ln n} dt.$$

1) Montrer que $a_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k I_k}{(\ln n)^{k+1}}$.

2) On suppose qu'il existe $p \geq 0$ tel que $I_0 = \ldots = I_{p-1} = 0$ et $I_p \neq 0$. Trouver un équivalent de a_n.

3) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur f pour que $\sum a_n$ converge.

Exercice 20. Établir l'existence d'une constante $K > 0$ telle que pour tout $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ avec $f(0) = 0$ et f'^2 intégrable sur $\mathbb{R}^+$, on ait :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{f(t)}{t} \right)^2 dt \leq K \int_0^{+\infty} f'^2(t) dt.$$

Quelle est la plus petite valeur possible pour K ?

Chapitre 12

Suites et séries de fonctions

Exercice 1 ***(Théorème de Korovkin).*** Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que u est un opérateur positif (et on note $u \geq 0$) si pour tout $f \in E$,

$$f \geq 0 \Rightarrow u(f) \geq 0.$$

1) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose u positif, montrer que u est continu.
2) Soit $f \in E$. On fixe $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + C(x-y)^2.$$

3) Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$ on pose $e_k(x) = x^k$. On a $e_k \in E$. Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{L}(E)^{\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs positifs. On suppose que pour $k = 0,1,2$, $(u_n(e_k))_n$ converge uniformément vers e_k sur $[0,1]$. Montrer que pour tout $f \in E$, $(u_n(f))_n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Exercice 2. On note $\mathcal{C}$ l'algèbre des fonctions continues et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1) Pour f dans $\mathcal{C}$ et $\delta > 0$, justifier l'existence de

$$\omega_f(\delta) = \sup\left\{|f(x) - f(y)| \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x-y| \leq \delta\right\}.$$

Quelle est la limite de $\omega_f(\delta)$ lorsque δ tend vers 0 ?

2) Soit désormais $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications linéaires de $\mathcal{C}$ dans lui même. On suppose que pour $f \in \mathcal{C}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $T_n(f) \geq 0$. On suppose aussi que pour la norme de convergence uniforme : $\forall f \in \{1, \sin, \cos\}$, $T_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$. Soient $\delta \in]0, \pi/2[$, y dans $\mathbb{R}$ et $g_y : x \in \mathbb{R} \mapsto 1 - \cos(x-y)$. Pour f dans $\mathcal{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$|T_n(f - f(y)1)| \leq \omega_f(\delta) T_n(1) + \frac{2\|f\|_\infty}{1-\cos(\delta)} T_n(g_y).$$

En déduire que $(T_n(f))_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 ***(Autour des polynômes de Bernstein).***

1) Simplifier pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \text{ et } \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

2) On pose pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \in [\![0, n]\!]$, $r_k(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^k$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 r_k(x) = nx(1-x).$$

3) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k} \in \mathbb{R}[X].$$

Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence de $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [0,1]$,

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2}.$$

On pourra considérer les indices k tels que $|k - nx| \leq n\eta$ et ceux tels que $|k - nx| > n\eta$. En déduire que $(B_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

4) Soit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que F est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes.

Exercice 4 ***(Itération de l'opérateur de Bernstein).*** Pour $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, $n \geq 1$ et $x \in [0,1]$ on note

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Montrer que si $n_0 \geq 1$,

$$\underbrace{B_{n_0} \circ \ldots \circ B_{n_0}(f)}_{k \text{ fois}} \xrightarrow[k \to +\infty]{\|\cdot\|_\infty} B_1(f).$$

Exercice 5. Quelles sont les fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont limites uniformes sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes strictement croissants ?

Exercice 6.

1) Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions c-lipschitziennes de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction f. Montrer que la convergence est uniforme.
2) Soit K un compact d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions c-lipschitziennes de K dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers $f : K \to \mathbb{R}$. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 7. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions convexes sur $[a,b]$ qui converge simplement vers f. Montrer que la convergence est uniforme sur tout compact de $]a,b[$.

Exercice 8 ***(Théorème de Chudnovsky).*** Soit I un segment contenu dans $]0,1[$.

1) Soit $\varphi : x \in I \mapsto 2x(1-x)$. Étudier la convergence sur I de la suite de fonctions (φ_n) où $\varphi_n = \varphi \circ \ldots \circ \varphi$ (n fois).
2) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que f est limite uniforme sur I d'une suite de polynômes à coefficients entiers.

Exercice 9 ***(Théorème de Walsh).*** Soient $x_1, \ldots, x_n$ des points deux à deux distincts d'un segment $[a, b]$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe une suite de polynômes coïncidant avec f en chaque point x_k et qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Exercice 10 ***(Théorèmes de Dini).*** Soient $a < b$ deux réels. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues qui converge simplement vers f.

1) On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante au sens où pour tout $n \geq 0$, $f_{n+1} \geq f_n$. Montrer que la convergence est uniforme.
2) Même question en supposant cette fois-ci chaque fonction f_n croissante.
3) On considère la suite de fonctions $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[0, 1]$ par $p_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$, pour tout $x \in [0, 1]$,
$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - p_n(x)^2\right).$$
Montrer que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 11 ***(Théorème d'Ascoli).*** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues de $\mathbb{R}$ dans lui même. Soit $A \subset \mathbb{R}$.

1) On suppose que pour tout $x \in A$, $\exists M_x > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|f_n(x)| \leq M_x.$$
On suppose A fini ou dénombrable. Montrer que l'on peut extraire de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge simplement sur A.
2) On ajoute l'hypothèse *d'équicontinuité* de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall y \in \mathbb{R},\ |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon.$$
Montrer que l'on peut extraire de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ et que la convergence est uniforme sur tout compact.
3) Réciproquement, on suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact. Montrer que la suite est uniformément bornée sur tout compact et équicontinue.

Exercice 12 ***(Théorème de sélection de Helly).***

1) Soient $E \subset \mathbb{R}$ dénombrable et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x \in E$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq 1$. Montrer qu'il existe une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers une fonction $f : E \to \mathbb{R}$.
2) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$. Montrer qu'il existe une sous-suite de fonctions de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$.

Exercice 13. Soient $M \geq 0$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$|f_n(x)| + |f_n'(x)| \leq M.$$
Montrer qu'il existe une suite extraite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément.

Exercice 14. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $d \geq 2$. On note P^n l'itérée n-ième de P pour la composition et $g_n : z \in \mathbb{C} \mapsto \frac{1}{d^n} \ln(\max\{1, |P^n(z)|\})$. Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{C}$.

Exercice 15. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs réelles. On suppose que pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$,

$$|f_n(x)f_m(x)| \leq \frac{1}{2^{|n-m|}}.$$

1) Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1]$.
2) Montrer que sa somme est bornée.
3) La convergence est-elle uniforme sur $[0,1]$?

Exercice 16.

1) Déterminer les fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont limites uniformes sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes réels.
2) Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Exercice 17. Pour $f \in \mathcal{C}^n([0,1],\mathbb{R})$, on note $\|f\|_n = \max\limits_{0\leq i\leq n} \|f^{(i)}\|_\infty$.

1) Soient $\varepsilon > 0$, $0 \leq a < b \leq 1$ et $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $\|P - f\|_\infty \leq \varepsilon$, $P(a) = f(a)$ et $P(b) = f(b)$.
2) Soient $\varepsilon > 0$, $0 \leq a < b \leq 1$ et $f \in \mathcal{C}^n([0,1],\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $\|P - f\|_n \leq \varepsilon$, et pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $P^{(i)}(a) = f^{(i)}(a)$ et $P^{(i)}(b) = f^{(i)}(b)$.
3) Soient $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a < b \leq 1$ et $f \in \mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe g de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ tel que $f = g$ sur $[0,1]$ en dehors de $[a-\eta, b+\eta]$ et g polynomiale sur $[a,b]$ avec $\|f - g\|_n \leq \varepsilon$.
4) On dit qu'une fonction est *localement polynomiale* en x si elle est égale à un polynôme sur un voisinage de x. Construire une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ localement polynomiale sur un sous-ensemble dense de $\mathbb{R}$ et qui ne soit pas polynomiale.

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f et f' soient intégrables. Pour $n \geq 1$, $x > 0$, on pose

$$g_n(x) = \int_0^{+\infty} n\cos t\,(\sin t)^n\, f(xt)dt.$$

Étudier le mode de convergence de la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 19. Soient S un segment de longueur > 0, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On munit $E = \mathcal{C}^0(S,\mathbb{R})$ de la norme infinie. On note V_f le sous-espace de E engendré par les fonctions $f_{a,b} : x \mapsto f(ax+b)$ où $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Décrire l'adhérence de V_f dans E.

Exercice 20. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont limites uniformes de fonctions lipschitziennes.

Chapitre 13

Séries entières

Exercice 1 ***(La série entière universelle de Mazurkiewicz-Sierpinski).***

1) Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue nulle en 0, $m \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que

$$|f(x) - x^m P(x)| \leq \varepsilon, \ \forall x \in [0,1].$$

2) Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération des polynômes à coefficients rationnels et nuls en 0. Établir l'existence d'une série entière $\sum a_n x^n$ et d'une extraction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant

$$|P_n(x) - s_{\phi(n)}(x)| \leq \frac{1}{n}, \ \forall n \geq 1, \ \forall x \in [0,1],$$

où l'on a posé $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

3) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue nulle en 0. Montrer qu'il existe une extraction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $(s_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{\sin(n\pi\sqrt{3})}$.

Exercice 3. Calculer pour $(a,x) \in \mathbb{R}^2$ à préciser $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(na)x^n}{n}$.

Exercice 4. Dévolopper en série entière les fonctions suivantes :
- $x \mapsto \arcsin(x)$,
- $x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$,
- $x \mapsto (\arcsin(x))^2$. En déduire la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\binom{2n}{n}}.$$

Exercice 5 . Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \mathrm{Tr}(A^n)z^n$.

Exercice 6. Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres complexes. On note R et R' les rayons de convergence respectifs de $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ et sous réserve de convergence, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. On suppose que $(b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ et qu'il existe $l \in \mathbb{C}$ tel que $\frac{a_n}{b_n} \to l$.

1) Montrer que $R \geq R'$.

2) On suppose que $R' = 1$ et $\sum b_n$ diverge. Montrer que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

3) On suppose $\mathbb{R}' = +\infty$. Montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

4) Application : Soit $p \in \mathbb{N}$, déterminer

$$\lim_{x \to 1^-} (1-x)^{p+1} \sum_{n=0}^{+\infty} n^p x^n.$$

Exercice 7. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$, soit $x \in [0, 1[$.

1) Montrer que la série $\sum \frac{n^\alpha x^n}{1-x^n}$ converge.

2) Donner un équivalent de sa somme $\phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha x^n}{1-x^n}$ lorsque $x \to 1^-$. (Indication : utiliser l'exercice précédent)

Exercice 8 *(Un exemple de fonction nulle part analytique).* Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{i2^n x}}{n!}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que sa série de Taylor a, en tout point de $\mathbb{R}$, un rayon de convergence nul.

Exercice 9 *(Étude d'un prolongement).* Soit $\alpha > 0$. On note f la somme de la série entière $\sum \frac{z^n}{n^\alpha}$.

1) Quel est le domaine de définition de f ?
2) Montrer que si $|z| < 1$,

$$f(z) = \frac{z}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{e^t - z} dt.$$

3) En déduire un prolongement continu de f à $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$.

Exercice 10. Soient $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux dans leur ensemble. Pour $n \geq 1$, on note u_n le nombre de k-uplets $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k$ tels que $a_1 x_1 + \ldots + a_k x_k = n$. Déterminer un équivalent de u_n en $+\infty$.

Exercice 11.

1) Soit $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ avec $Q(0) \neq 0$. On pose $F = \frac{P}{Q}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $Q(z) \neq 0$, on pose $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. Montrer que f est développable en série entière sur un voisinage de 0 et que les coefficients de ce développement vérifient une relation de récurrence linéaire à coefficients constants. Préciser le rayon de convergence.

2) Réciproquement, si la suite $(u_n)_n$ vérifie une relation de récurrence linéaire à coefficients constants, montrer que la série entière $\sum u_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$ et qu'il existe $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ avec $Q(0) \neq 0$ tels que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n = \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Exercice 12 ***(Théorème d'Abel-Dirichlet).***

1) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ fini. On suppose que $\sum a_n R^n$ converge. Montrer que la convergence de la série $\sum a_n x^n$ est uniforme sur $[0, R]$ et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n = \lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

2) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1. Soit $D = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

   (i) La série converge uniformément sur $\overline{D}$.

   (ii) La série converge uniformément sur D.

   (iii) La série converge uniformément sur $\mathbb{U}$.

Exercice 13 ***(Le logarithme complexe).*** Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, on note $\mathcal{O}(z)$ l'unique argument dans $]-\pi, \pi[$ de z. On pose aussi $\log z = \ln |z| + \mathcal{O}(z)$.

1) Déterminer lorsque cela a un sens $\log e^z$ et $e^{\log z}$.

2) Montrer que si $|z| < 1$, alors

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n.$$

3) En déduire pour x convenable $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$ et $\sum \frac{\sin(nx)}{n}$.

Exercice 14 ***(Un théorème de Liouville).*** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont le rayon de convergence est infini. On note f sa somme.

1) On suppose f bornée sur $\mathbb{C}$, montrer que f est constante.

2) On suppose qu'il existe un polynôme P à coefficients positifs tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq P(|z|)$. Montrer que f est un polynôme.

Exercice 15 ***(Identité de Parseval).*** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière complexe de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que si $r \in [0, R[$,

$$\sum |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Exercice 16. Soit $(a_n)_n \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum a_n z^n$ ait un rayon de convergence $R \geq 1$. On pose pour $|z| < 1$, $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$. On suppose f bornée sur le disque ouvert $D(0,1)$. Montrer que f est un polynôme.

Exercice 17 ***(Principe du maximum).*** Soit f une fraction rationnelle qui n'a pas de pôle dans le disque fermé $D_f(c, R)$ de centre c et de rayon R. Soit $z_0 \in D(c, R)$.

1) Montrer que f est développable en série entière autour de z_0. Préciser le rayon de convergence.

2) On note $(a_n)_n$ la suite des coefficients du développement en série entière de f au voisinage de z_0. Calculer, pour r convenable,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

3) Montrer que $|f|$ atteint son maximum sur $D_f(c, R)$ en un point de la frontière.

Exercice 18 ***(Séries de Laurent).*** Soit $F(z) = b_m z^m + \ldots + b_1 z + b_0 + \sum_{i \geq 1} b_{-i} z^{-i}$. La suite $(b_i)_{-\infty < i \leq m}$ étant une suite de réels ; on suppose qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $F(z)$ existe pour $|z| \geq A$.

1) On suppose $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{Q}$ et qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $p \geq N$, $F(p) \in \mathbb{Z}$. Montrer que $b_0 \in \mathbb{Q}$ et que $b_{-i} = 0$ pour tout $i \geq 1$.
2) Même question si l'on ne suppose plus $b_1, \ldots, b_m$ rationnels.

Exercice 19. Soient $M > 0$ et $\mathcal{S}_M$ l'ensemble des fonctions g de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$, développables en série entière sur $]-1, 1[$ et telles que si pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(g) x^k, \quad \text{alors } \forall k \geq 0,\ |a_k(g)| \leq M.$$

On considère $g \in S_M$ et $(g_n)_n \in \mathcal{S}_M^{\mathbb{N}}$. Montrer que chaque suite $(a_k(g_n))_n$ converge vers $a_k(g)$ si et seulement si $(g_n)_n$ converge simplement vers g. A-t-on convergence uniforme ?

Exercice 20. Soit $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $\overline{D}$ et développables en série entière sur D. Pour $f \in E$ et $z \in D$, on note

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f) z^n.$$

1) Montrer que pour tout $f \in E$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$.
2) Montrer que si une suite d'éléments de E converge uniformément du $\overline{D}$, alors sa limite est encore dans E.
3) Montrer que $(E, \| \cdot \|_\infty)$ est complet.
4) Montrer que le sous-espace des polynômes est dense dans E.

Exercice 21. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On dit que f est absolument monotone sur $]a, b[$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$.

1) Donner des exemples de fonctions absolument monotones.
2) Montrer qu'une fonction absolument monotone est analytique.

Exercice 22 ***(Un théorème de Bernstein).*** Soient $a > 0$ et $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]-a, a[$,

$$f^{(2k)}(x) \geq 0.$$

Montrer que f est développable en série entière sur $]-a, a[$.

Exercice 23. Soient I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est analytique *i.e* pour tout $x_0 \in I$ il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 sur lequel f est égal à la somme de sa série de Taylor en x_0.

(ii) Pour tout segment $J \subset I$, il existe des constantes $C, r > 0$ telles que,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in J,\ |f^{(n)}(x)| \leq C r^n (n!).$$

On pourra utiliser la propriété de Borel Lebesgue pour traiter le sens compliqué.

Exercice 24. Soit $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Soit $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\sum n|a_n|$ converge.

1) Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est au moins égal à 1. Pour $z \in D$ on note $f(z)$ sa somme.
2) On suppose $a_1 \neq 0$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} n|a_n| \leq |a_1|$. Montrer que f est injective.

Exercice 25 ***(Théorème de Bieberbach).*** Soit $f(z) = z + \sum_{n\geq 2} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence ≥ 1. On suppose les a_n réels et que f est injective sur $D(0,1)$.

1) Soit $z \in D(0,1)$. Montrer que $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$. En déduire que si $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ alors $\mathrm{Im}(f(z)) \geq 0$.
2) Calculer pour $0 < r < 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\int_0^\pi \mathrm{Im}(f(re^{i\theta}))\sin(n\theta)d\theta$. En déduire que pour $n \geq 1$, $|a_n| \leq n$.
3) Montrer que cette majoration est optimale.

Exercice 26. Pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(nx)\exp\left(-n^\alpha\right).$$

1) Montrer que f est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2) Pour quelles valeurs de a la fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de tout point de $\mathbb{R}$?

Exercice 27 ***(Une méthode de construction de fonctions nulle part analytiques).*** Étant donné une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe de $\mathcal{C}^\infty$ et un réel x, on note $R(f,x)$ le rayon de convergence de la série de Taylor de f au point x. On se propose de construire f telle que $R(f,x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1) On fixe $(c_n)_{n\geq 1} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$, on définit $(b_n)_{n\geq 1}$ par :

$$b_1 = 1 + 2c_1, \text{ et } \forall k \geq 2,\ b_k = 2 + c_k + \sum_{j=1}^{k-1} b_j^{k+1-j}.$$

   Soit $f : x \in \mathbb{R} \to \sum_{k\geq 1} b_k^{1-k} e^{ib_k x}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \geq c_1$.
3) Montrer plus généralement que pour tout $n \geq 2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f^{(n)}(x)| \geq c_n$.
4) Conclure.

Exercice 28. On considère l'ensemble E des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. E est muni d'une famille de semi-normes $(p_k)_k$ définie par : pour tout $f \in E$,

$$p_k(f) = \sup_{0\leq i\leq k,\ |x|\leq k} |f^{(i)}(x)|.$$

Les semi-normes définissent sur E une topologie d'espace de Fréchet (espace vectoriel topologique métrisable complet). Un système fondamental de voisinages de 0 dans E est formé par les $V_{n,\varepsilon}$ ($n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$) où :

$$V_{n,\varepsilon} = \{f \in E \mid p_n(f) \leq \varepsilon\}.$$

La topologie de E provient aussi de la métrique complète définie par : si $(f,g) \in E^2$,

$$d(f,g) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(f-g)}{1+p_k(f-g)}.$$

Enfin, si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de E, dire que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers $f \in E$, c'est dire que pour tout $k \geq 0$, la suite $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers $f^{(k)}$ sur tout compact de $\mathbb{R}$. On note pour $f \in E$, $x \in \mathbb{R}$, $R(f,x)$ le rayon de convergence de la série de Taylor de f au point x.

1) Étant donnés des entiers $b, p \geq 1$, on pose

$$F(b,p) = \left\{ f \in E \mid \text{Il existe } x \in [-p,p],\ |f^{(n)}(x)| \leq b^n n!\ \forall n \geq 0 \right\}.$$

Montrer que $F(b,p)$ est un fermé d'intérieur vide de E.

2) Montrer que l'ensemble A des éléments $f \in E$ tels que $R(f,x) = 0$ en tout point $x \in \mathbb{R}$ est un résiduel de E. Montrer que tout élément de E est somme de deux éléments de A.

Exercice 29 ***(Théorèmes Taubériens).*** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que $f(x) = \sum_{n\geq 1} a_n x^n$ existe pour tout $x \in]-1,1[$. On suppose aussi que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \ell \in \mathbb{C}$. Démontrer que $\sum a_n$ converge et que sa somme vaut ℓ dans les cas suivants :

1) $(a_n)_{n\geq 0} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$.
2) $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.
3) $\sum_{n\geq 0} n|a_n|^2$ converge.
4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k a_k = 0$.

Exercice 30 ***(Théorème Taubérien fort).*** Soit $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$. On suppose que la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence ≥ 1 et que sa somme F vérifie $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x) = 0$. Il s'agit de prouver que $\sum a_n$ converge et que sa somme est nulle. On note

$$\Phi = \left\{ \varphi : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \forall x \in [0,1[,\ \sum a_n \varphi(x^n) \text{ converge et } \lim_{x\to 1^-} \sum a_n \varphi(x^n) = 0 \right\}.$$

1) a) Vérifier que si $P \in \mathbb{R}[X]$ est tel que $P(0) = 0$ alors $P \in \Phi$.
   b) Soit q une fonction polynôme. Montrer l'existence et déterminer

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n q(x^n).$$

2) a) On considère

$$g : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1/2] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

   Soit $\varepsilon > 0$. Établir l'existence de polynômes p_1 et p_2 vérifiant :
   (*i*) $p_1(0) = p_2(0) = 0$, $p_1(1) = p_2(1) = 1$.
   (*ii*) $p_1 \leq g \leq p_2$.
   (*iii*) $\int_0^1 q < \varepsilon$ où $q(x) = \frac{p_2(x)-p_1(x)}{x(1-x)}$.
   b) Montrer que $g \in \Phi$.

3) En déduire le théorème Taubérien de Hardy Littlewood : si $(b_n)_n$ est une suite réelle vérifiant : $b_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} \sum b_n x^n = \ell$, alors $\sum b_n$ converge et sa somme vaut ℓ.

Exercice 31. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer le développement en série entière de $\varphi_\alpha : x \in]-1,1[\mapsto \cos(\alpha \arccos x)$.
2) Pour quelles valeurs de α la fonction φ_α est-elle polynomiale ?

Chapitre 14

Équations différentielles

Exercice 1.

1) Résoudre sur $]0,\pi[$, $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.
2) Résoudre $y'' + y = 2\tan x$.

Exercice 2. Soit $\lambda > 0$.

1) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$, $(E) : xy' + \lambda y = \frac{1}{1+x}$.
2) Existe-t-il des solutions de (E) de limite finie en 0 ?
3) Trouver les solutions de (E) développables en série entière au voisinage de 0.
4) Calculer
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}(1+3n)}.$$

Exercice 3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation, $(E) : y^{(4)} + \alpha y = 0$.

Exercice 4. Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues telles que $f \leq 0$. Montrer que l'équation différentielle $y'' + fy = g$ possède une unique solution sur $[a,b]$ telle que $y(a) = y(b) = 0$.

Exercice 5. Soient a et b deux fonctions continues et T-périodiques de $\mathbb{R}$ dans lui même. Discuter de l'existence de solutions T-périodiques de l'équation $(E) : y' + ay = b$.

Exercice 6. Soient a, b deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $a(x) \geq \lambda$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{+\infty} b = 0$ et $\lim\limits_{-\infty} b = 0$

1) Montrer que toute solution de $y' + ay = b$ possède une limite nulle en $+\infty$.
2) Montrer qu'il existe une unique solution de limite nulle en $-\infty$.

Exercice 7. On considère l'équation différentielle (E) à coefficients continus sur $\mathbb{R}$.

$$(E) : x'' + p(t)x' + q(t)x = 0.$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur p et q pour qu'il existe deux solutions sur $\mathbb{R}$ dont le produit vaut constamment 1.

Exercice 8.

1) Soit $x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ convexe, minorée et décroissante. Étudier la limite de $tx'(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
2) Soient $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ et $x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_+^*)$ décroissante telle que $x'' = qx$. Montrer que

$$\lim_{+\infty} x = 0 \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} tq(t)dt = +\infty.$$

Exercice 9. Soit $p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^{+\infty} t|p(t)|dt < +\infty$. Montrer que l'équation différentielle $y'' + py = 0$ possède une unique solution y telle que $\lim\limits_{+\infty} y = 1$ et $\lim\limits_{+\infty} y' = 0$.

Exercice 10. Soit y une solution non nulle de $y'' + (1 + p(x))y = 0$ avec p de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, p' intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $\lim\limits_{+\infty} p = 0$.

1) Montrer qu'il existe un réel a tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait,

$$y^2(x) \leq a + 2\int_0^x y^2(t)|p'(t)|dt.$$

2) En déduire que y est bornée.

Exercice 11. Soient $f, g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ des applications continues. On suppose $g \geq 0$ et

$$\forall t \in [a, b],\ 0 \leq f(t) \leq h(t) + \int_a^t g(u)f(u)du.$$

Montrer que pour tout $t \in [a, b]$,

$$0 \leq f(t) \leq h(t) + \int_a^t g(u)h(u)e^{\int_u^t g}du.$$

Exercice 12.

1) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue. On suppose qu'il existe $C \geq 0$ tel que pour tout $x \geq 0$

$$xf(x) \leq C + \int_0^x f(t)dt.$$

Montrer que f est bornée.

2) Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ une solution de $y'' + ty = 0$. Montrer que g est bornée.

Exercice 13. Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ telle que $\int_0^{+\infty} \|a(u)\|du$ converge où $\|\cdot\|$ désigne la norme triple associée à la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si f est solution de $y' = ay$ alors f tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}^n$ en $+\infty$.

Exercice 14. Soient $a_0, \ldots, a_{n-1}$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans lui même et $\mathcal{S}$ l'espace des solutions de

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = 0.$$

Si $x_0 \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que tout élément non nul de $\mathcal{S}$ s'annule au plus $n - 1$ fois sur $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$.

Exercice 15. Soient y_1, y_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle linéaire

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

où a, b sont des fonctions continues sur un intervalle I. Montrer que les zéros de y_1 sont isolés et qu'entre deux zéros consécutifs de y_1 il y a un unique zéro de y_2.

Exercice 16 ***(Théorème de Sturm).***

1) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $q_1, q_2 : I \to \mathbb{R}$ avec $q_1 \geq q_2$. Soient $\alpha < \beta$ deux zéros d'une solution non nulle de $y'' + q_2 y = 0$. Montrer que toute solution non nulle de $y'' + q_1 y = 0$ s'annule sur $[\alpha, \beta]$.
2) On considère l'équation différentielle $y'' + e^t y = 0$ sur $I = \mathbb{R}^+$. Montrer qu'une solution non nulle admet une infinité de zéros qu'on peut ordonner en une suite strictement croissante $(t_n)_{n\geq 1}$. Montrer de plus que $t_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et que

$$t_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2 n^2}{4}.$$

Exercice 17. Soit $\varepsilon : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ avec ε de limite nulle en $+\infty$. On considère une solution non nulle x de l'équation différentielle $x'' + x = \varepsilon(t)x'$ définie sur $[a, +\infty[$. Soit $b \geq a$. Pour $t \geq b$, on définit,

$$N_b(t) = \left|\{u \in [b, t]\ ,\ x(u) = 0\}\right|.$$

Montrer que pour b assez grand, on a

$$N_b(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t}{\pi}.$$

Exercice 18 ***(Inégalité de Liapounov).*** Soient $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Soit $u \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ une solution non nulle de l'équation différentielle $y'' + fy = 0$ vérifiant $u(a) = u(b) = 0$. Montrer que

$$\int_a^b |f| \geq \frac{4}{b-a}.$$

Exercice 19 ***(Théorème de stabilité de Liapounov).*** Soient $T > 0$ et $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction T-périodique. Soient $\mathcal{S}$ l'espace des solutions réelles de $(E) : y'' + qy = 0$, et y_1 (resp. y_2) l'élément de $\mathcal{S}$ défini par $y_1(0) = 1$ et $y_1'(0) = 0$ (resp. $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$).

1) Montrer que si $f \in \mathcal{S}$, il en est de même de $f_T : x \mapsto f(x + T)$. On note Φ l'endomorphisme de $\mathcal{S}$ qui à f associe f_T et A sa matrice dans la base (y_1, y_2).
2) Calculer $\det A$.
3) On suppose $|\operatorname{Tr} A| < 2$. Montrer que tout élément de $\mathcal{S}$ est borné sur $\mathbb{R}$.
4) On suppose $q \geq 0$ et non identiquement nulle. Montrer que tout élément de $\mathcal{S}$ s'annule au moins 2 fois sur $\mathbb{R}$.
5) On admet l'inégalité de Liapounov. On suppose $q \geq 0$ non nulle avec $T \int_0^T q < 4$. Montrer que les solutions de (E) sont toutes bornées sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20. Soit $t \mapsto A(t)$ une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$ $A(t) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Soit $X(t)$ une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ $X'(t) = A(t)X(t)$. On suppose $X(0) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 21. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $C = AB - BA$ et on suppose que A et B commutent avec C. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $M(t) = e^{-t(A+B)}e^{tA}e^{tB}$. Exprimer $M(t)$ en fonction de t et C.

Exercice 22. On considère le système $(E) : X' = AX$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que toute solution de (E) est à valeurs dans un sous-espace affine de direction $\mathrm{Im}A$.
2) On suppose désormais $n = 3$ et on munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. On suppose que A est antisymétrique, montrer que toute solution de (E) est de norme constante. Que penser de la réciproque ?
3) Que dire des solutions de l'allure des solutions de (E) lorsque $A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 23 *(Système de Lax).* Soit $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\exists S \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, GL_n(\mathbb{R}))$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$S(t)^{-1}A(t)S(t) = A(0).$$

(ii) $\exists B \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$A'(t) = A(t)B(t) - B(t)A(t).$$

Exercice 24. Soient $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $X : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ solution de

$$X' = AX - XA.$$

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $t \mapsto \mathrm{Tr}(X(t)^k)$ est constante.
2) Montrer que les valeurs propres de $X(t)$ sont indépendantes de t.
3) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X(t) \sim X(0).$$

Exercice 25. Soient A, B deux applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$A'(t) = A(t)B(t) - B(t)A(t).$$

Montrer que le spectre de $A(t)$ est indépendant de t.

Exercice 26. Soit $A : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $t \geq 0$ les coefficients de $A(t)$ sont positifs. Soit $X_0 \in (\mathbb{R}^+)^n$. Montrer que la solution de

$$\begin{cases} Y' &= AY \\ Y(0) &= X_0 \end{cases}$$

est à valeurs dans $(\mathbb{R}^+)^n$.

Exercice 27 *(Classification différentielle des flots linéaires).* On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X_0 \in \mathbb{R}^n$, on note $g(A, X_0)$ la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' &= AX \\ X(0) &= X_0 \end{cases}$$

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$f \circ g(A, X_0) = g(B, f(X_0)).$$

(ii) A et B sont semblables.

Exercice 28. Soient $n \in \mathbb{N}$, $F : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+^*$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ avec $F'(1) > 0$ et $F'' \leq 0$. On suppose que $u : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ est solution $\mathcal{C}^2$ et bornée de

$$-u'' - \frac{F'}{F}u' + \frac{n^2}{F^2}u = 0.$$

1) Que dire si $n = 0$?
2) On suppose $n \geq 1$ et F bornée. Montrer que $u \underset{+\infty}{\to} 0$.

Exercice 29. Soient $M, R > 0$, et $(v_{p,q})_{p,\geq 0}$ une suite double de nombre réels telle que $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$, $|v_{p,q}| \leq \frac{M}{R^{p+q}}$.

1) Justifier l'existence de $v(t, x) = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} v_{p,q} t^p x^q$ pour $|t| < R$, $|x| < R$.
2) Montrer que l'équation $x'(t) = v(t, x(t))$ admet une unique solution développable en série entière au voisinage de 0 avec la condition initiale $x(0) = 0$.

Exercice 30. Soient $A \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ intégrable et $u_0 \in \mathbb{R}^n$. On considère u la solution sur $\mathbb{R}^+$ du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcr} u'(t) & = & A(t)u(t) \\ u(0) & = & u_0 \end{array} \right.$$

1) Montrer que u est bornée sur $\mathbb{R}^+$, puis que u admet une limite finie en $+\infty$. On note $\varphi(u_0)$ cette limite.
2) Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.
3) Calculer $\det \varphi$.

Chapitre 15

Calcul différentiel

Exercice 1. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$.

1) Soit $x_0 \in U$. On suppose qu'il existe deux applications $h_1, h_2 : U \to \mathbb{R}$, différentiables en x_0 et telles que $h_1 \leq f \leq h_2$ avec $h_1(x_0) = h_2(x_0)$. Montrer que f est différentiable en x_0.
2) On suppose à présent f 1-lipschitzienne et qu'il existe $[a, b] \subset U$ tel que $f(b) - f(a) = \|b - a\|$. Montrer que f est différentiable en tout point de $]a, b[$.
3) Soit C un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $x \mapsto d(x, C)$ est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n \setminus C$.

Exercice 2. Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f_1, \ldots, f_p$ des fonctions de $\Omega \to \mathbb{R}$. On pose $f = \max(f_1, \ldots, f_p)$.

1) Montrer que si toutes les f_i sont continues en $x_0 \in \Omega$, alors f aussi.
2) On suppose que toutes les f_i sont différentiables en x_0. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit différentiable en x_0.

Exercice 3 *(Contre-exemple de Peano)*. Étudier la classe de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0, 0) = 0$ et si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $f(x, y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$.

Exercice 4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(I^2, I)$ telle que $\forall (x, y) \in I^2$,

$$f(x, x) = x, \;\; f(x, y) = f(y, x).$$

1) Calculer $df(x, x)$ pour $x \in I$.
2) Soit S un segment de I. Soit $k > 0$ tel que $\forall (x, y) \in S^2$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq k.$$

   Quelle condition imposer à k pour avoir $f(S^2) \subset S$?
3) On suppose cette condition satisfaite et on se donne $g \in \mathcal{C}^1(I^2, I)$ vérifiant les mêmes propriétés que f (avec le même segment S). Montrer que la suite définie par $(x_0, y_0) \in S^2$ et $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (f(x_n, y_n), g(x_n, y_n))$ converge dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 ***(Dérivations).***

1) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Montrer que si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ alors

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_k}(tx)dt.$$

2) On pose $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On note D l'ensemble des formes linéaires φ de E vérifiant $\forall f, g \in E$

$$\varphi(fg) = f(0)\varphi(g) + \varphi(f)g(0).$$

Montrer que D est de dimension finie et que $\dim D = n$.

Exercice 6 ***(Jacobienne antisymétrique).*** Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dont la matrice jacobienne est en tout point antisymétrique. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, antisymétrique et $b \in \mathbb{R}^n$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$.

Exercice 7 ***(Lemme de Poincaré).*** Déterminer les applications $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dont la jacobienne est symétrique en tout point.

Exercice 8 ***(Théorème du relèvement).*** Soit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{U}$ de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geq 2$. Montrer qu'il existe $t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$u(x) = e^{it(x)}.$$

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On note D le disque unité fermé. On suppose que $\forall (x,) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$, $f(x, y) = y^2 - x^2$. Montrer que f admet au moins un point critique dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on suppose que df_x est une isométrie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

1) Montrer que pour $1 \leq i, j, k \leq n$ on a

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f_p}{\partial x_i} \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_k} = 0.$$

2) En déduire que f est une isométrie affine.

Exercice 11. Soit E un espace euclidien. Soit $f : E \to E$ une application $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $x \in E$, df_x soit une isométrie de E. Montrer que f est une isométrie affine. On admettra le théorème d'inversion locale.

Exercice 12. Soit $\| \cdot \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$,

$$\|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|.$$

Montrer que f réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui même. On admettra le théorème d'inversion globale.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $df_x \in GL_n(\mathbb{R})$ et $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)\| = +\infty$.

1) Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $f^{-1}(K)$ est compact.
2) Montrer par un argument de connexité que f est surjective.
3) Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $f^{-1}(\{y\})$ est fini. On note m son cardinal et $x_1, \dots, x_m$ les éléments de $f^{-1}(\{y\})$.
4) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de y tel que $f^{-1}(V) \subset \cup_{i=1}^m B(x_i, \varepsilon)$.
5) Montrer qu'il existe un voisinage ouvert W de y tel que,
$$\forall z \in W,\ |f^{-1}(\{z\})| = m.$$
6) En déduire que l'application $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}$ définie pour $z \in \mathbb{R}^n$ par $\varphi(z) = |f^{-1}(\{z\})|$ est constante.
7) On suppose que $f(0) = 0$, et que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \neq 0$. Montrer que f réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui même.

Exercice 14 *(Une preuve du théorème de D'Alembert-Gauss).* On admet le corollaire du théorème d'inversion locale suivant : Si Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ est telle que $df_a \in GL_2(\mathbb{R})$ pour tout $a \in \Omega$, alors $f(\Omega)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. On note Z l'ensemble des racines de P' puis $B = \mathbb{C} \setminus P(Z)$ et $A = P^{-1}(B)$. En étudiant les propriétés topologiques de l'application P, restreinte à A et corestreinte à B, démontrer le théorème fondamental de l'algèbre.

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue. Soit $a \in \mathbb{R}^n$. On note $D^+f(a)$ (resp. $D^-f(a)$) l'ensemble des dg_a où $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ telle que $f \leq g$ (resp. $f \geq g$) et $f(a) = g(a)$.

1) Montrer que f est différentiable en a si et seulement si $D^+f(a) \neq \emptyset$ et $D^-f(a) \neq \emptyset$.
2) On suppose f différentiable en a. Déterminer $D^+f(a)$ et $D^-f(a)$.

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe un ouvert U, dense dans $\mathbb{R}^n$ tel que le rang de df_x soit localament constant sur U.

Exercice 17 *(Une étape de la preuve du théorème d'inversion locale).* Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $a \in U$ tel que df_a soit inversible. Démontrer qu'il existe un voisinage V de a sur lequel f est injective.

Exercice 18 *(Fonctions convexes).* On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Soit C un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$. Une application $J : C \to \mathbb{R}$ est dite α-convexe ($\alpha > 0$) si $\forall(x,y) \in C^2$, $\forall\delta \in [0,1]$,
$$J((1-\delta)x + \delta y) \leq (1-\delta)J(x) + \delta J(y) - \frac{\alpha}{2}\delta(1-\delta)\|x-y\|^2.$$
Si J est 0-convexe, on dit que J est convexe.

1) Montrer que toute fonction convexe $J : C \to \mathbb{R}$ est continue et dérivable en tout point de C par rapport à tout vecteur.
2) Soit $J : C \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. Si $x \in C$ on note $\nabla J(x)$ le gradient de J en x et $J''(x) = \left(\frac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{1\leq i,j\leq n}$ sa hessienne au point x. Montrer que J est α-convexe si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :

(*i*) $\forall (x,y) \in C^2$, $J(y) \geq J(x) + \langle \nabla J(x) | y - x \rangle + \frac{\alpha}{2} \|x-y\|^2$.

(*ii*) $\forall (x,y) \in C^2$, $\langle \nabla J(y) - \nabla J(x) | y - x \rangle \geq \alpha \|x-y\|^2$.

(*iii*) $\forall x \in C$, $\forall w \in \mathbb{R}^n$, $\langle J''(x) w | w \rangle \geq \alpha \|w\|^2$.

3) Soit $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction α-convexe.

a) Montrer que J atteint un minimum global en un point x_0.

b) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite minimisante au sens où $J(u_n) \to J(x_0)$. Montrer que $u_n \to x_0$.

Exercice 19 *(Méthode du gradient).* Soit $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $\alpha > 0$ tel que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$,

$$G(y) - G(x) \geq \langle \nabla G(x), y - x \rangle + \frac{\alpha}{2} \|y - x\|^2.$$

1) Montrer que G atteint sa borne inférieur sur $\mathbb{R}^n$ en un unique point.

2) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ un point en lequel le gradient de G ne s'annule pas. Montrer que la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto G(x + t \nabla G(x))$ atteint son minimum en un unique point. Que dire si $\nabla G(x) = 0$?

3) On définit une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\forall k \geq 0$, x_{k+1} est le point de $x_k + \mathbb{R} \nabla G(x_k)$ en lequel la restriction de G est minimale. Que dire de $\nabla G(x_k)$ et $\nabla G(x_{k+1})$ pour $k \in \mathbb{N}$?

4) Étudier la convergence de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Exercice 20. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ une fonction strictement convexe. On suppose que

$$\frac{f(x)}{\|x\|} \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Montrer que ∇f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^p$ dans lui même.

Exercice 21. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^+)$. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $\mathbb{R}^p$ telle que

$$\nabla f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 22 *(Théorème des extrema liés).* On munit $\mathbb{R}^p$ de sa structure euclidienne canonique. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$. Soient $g_1, \ldots, g_k$ des fonctions de $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. On note $\Sigma = \{x \in U \mid g_1(x) = \ldots = g_k(x) = 0\}$. Soit enfin $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ telle que la restriction de f à Σ possède un minimum local en un point $a \in \Sigma$ *i.e*, on peut trouver $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U$ et pour tout $x \in B(a,r) \cap \Sigma$ $f(x) \geq f(a)$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère

$$\begin{array}{cccc} f_n & : & U & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x) + n \sum_{i=1}^k g_i(x)^2 + \|x - a\|^2 \end{array}.$$

a) Justifier que $f_n|_{B_f(a,r)}$ atteint son minimum en au moins un point a_n.

b) Montrer que la suite (a_n) converge vers a.

c) Montrer que $\nabla f_n(a_n) = 0$ pour n assez grand.

2 On suppose que la famille $(\nabla g_i(a))_{1 \leq i \leq k}$ est libre.

a) (Lemme) Montrer que si $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel de dimension finie,

$$X = \{(x_1, \ldots, x_k) \in E^k \mid (x_1, \ldots, x_k) \text{ est liée}\} \text{ est une partie fermée de } E^k.$$

b) En déduire que $\nabla f(a) \in \mathrm{Vect}(\nabla g_i(a))_i$

3) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, et $s > 0$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui à $(x_1, \ldots, x_n)$ associe $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \ldots x_n$.. Soit $\Gamma = \{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = s\}$. Étudier le maximum global de $f|_\Gamma$. Retrouver alors l'inégalité arithmético-géométrique.

Exercice 23. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ telle que $df_x(x) \leq 0$ pour tout x de norme assez grande. Montrer que f admet un maximum global.

Exercice 24. Déterminer les triangles inscrits dans un cercle d'aire maximale.

Exercice 25 ***(Une caractérisation des polynômes d'Hermite).*** Soit D l'ensemble des n-uplets de réels 2 à 2 distincts. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$, on pose

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \ln|x_i - x_j|.$$

1) Montrer que f admet un minimum.
2) Soit $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un point où f atteint son minimum. On pose $H = \prod_{k=1}^{n}(X - a_k)$. Montrer que pour tout $1 \leq k \leq n$,
$$H''(a_k) - 4a_k H'(a_k) = 0.$$
3) En déduire une équation différentielle vérifiée par H et expliciter H.
4) Calculer $\min f$ pour $n = 2, 3$.

Exercice 26 ***(Principe du maximum (1))*** Soit B la boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ de centre 0 et de rayon $R > 0$. Soit U une fonction continue sur $\overline{B}$, nulle sur $S(0, R)$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur B et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
1) Montrer que si U présente un maximum local en $x \in B$, alors $\Delta U(x) \leq 0$.
2) Montrer que s'il existe $a \in B$ tel que $U(a) = 0$ alors il existe $b \in B$ tel que $\Delta U(b) = 0$.
3) Montrer que si $\Delta U < 0$ sur B alors $U > 0$ sur B.
4) Montrer que si $\Delta U \leq 0$ sur B alors $U \geq 0$ sur B (on pourra utiliser la fonction $U_0 : x \mapsto R^2 - \|x\|^2$).

Exercice 27 ***(Principe du maximum (2)).*** Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Soit U une application continue sur $\overline{\Omega}$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω. On suppose U harmonique (c'est à dire de laplacien nul sur Ω). Montrer que

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} U(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} U(x).$$

Exercice 28 ***(Principe du maximum (3)).*** Soient $a_1, \ldots, a_n$ des fonctions continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Soit $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+^*$ continue.
1) Soit $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$ vérifiant
$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + b(x)u(x) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x). \quad (A)$$
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Montrer que
$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} u(x). \quad (B)$$
2) On remplace $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)$ par $\sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right)$ dans (A) ; où les fonctions α_{ij} sont dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Montrer que si la matrice symétrique $(\alpha_{ij}(x) + \alpha_{ji}(x))_{1 \leq i,j \leq n}$ est positive pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, alors (B) est encore vraie.

Exercice 29. Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue telle que $f_{|F} = 0$. On suppose de plus f de classe $\mathcal{C}^1$ sur le complémentaire de F. Enfin pour tout j,

$$\sup_{x \in F^C,\, d(x,F) \leq \varepsilon} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| \underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 30 *(Équations de Lagrange).* Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{E} = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}) \,|\, u(0) = a,\ u(1) = b\}$. On introduit $I : u \in \mathcal{E} \mapsto \int_0^1 F(t, u(t), u'(t))dt$. On suppose que I admet un maximum en $u_0 \in \mathcal{E}$. Montrer que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial z}(t, u_0(t), u_0'(t))\right) = \frac{\partial F}{\partial y}(t, u_0(t), u_0'(t)).$$

Exercice 31. Soit $\varphi_n : (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, où les σ_i sont les fonctions symétriques élémentaires en les x_i. Calculer le déterminant jacobien de φ en $(x_1, \ldots, x_n)$.

Exercice 32. Déterminer les extrema locaux du déterminant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 33. Montrer que exp est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $\forall (A, H) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$,

$$d\exp(A)(H) = \int_0^1 e^{tA} H e^{(1-t)A} dt.$$

Exercice 34. On définit une application f sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ par $f(A) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2 A} dt$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. En déterminer une expression simple.

Exercice 35. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $f(M) = (\mathrm{Tr}(M), \ldots, \mathrm{Tr}(M^n))$.

1) Montrer que f est différentiable et préciser $df(M)(H)$ pour $M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2) Montrer que le rang de $df(M)$ est égal au degré de μ_M.
3) Montrer que $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, \mu_M = \chi_M\}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 36. Soit E un espace euclidien.

1) Montrer que $\mathcal{S}^{++}(E)$ est un ouvert de $\mathcal{S}(E)$.
2) Montrer que $u \in S^{++}(E) \mapsto u^2 \in \mathcal{S}^{++}(E)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Exercice 37.

1) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Calculer $I = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle X, AX \rangle} dx_1 \ldots dx_n$.
2) Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Calculer

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n\|^2} dx_1 \ldots dx_n.$$

Exercice 38. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose f intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{1 + (x + g(t))^2} dt.$$

Montrer que F est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\int_{\mathbb{R}} F$.

Exercice 39 ***(Inégalité de Hilbert).***

1) On considère $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continues à support compact dans $]0, +\infty[$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{f(x)g(y)}{x+y}dxdy \leq \pi\sqrt{\int_0^{+\infty} f^2}\sqrt{\int_0^{+\infty} g^2}.$$

2) Soit P un polynôme réel de degré N. On pose $P = a_N X^N + \ldots + a_0$. On associe à P le polynôme $Q = \frac{a_N}{N!}X^N + \ldots + a_0$. Montrer que

$$\int_0^1 P^2 \leq \pi\int_0^{+\infty} Q(x)e^{-2x}dx.$$

Exercice 40 ***(Une caractérisation du point de Fermat).*** On note T le triangle plein de sommets A, B et C. On suppose $\widehat{A}, \widehat{B}$ et $\widehat{C}$ de mesure $< \frac{2\pi}{3}$. Soit $f : M \in \mathbb{R}^2 \mapsto MA + MB + MC$. Montrer que f atteint un minimum global en un point distinct de A, B ou C et appartenant à T.

Exercice 41 ***(Trajectoires lumière).*** Soit K un compact convexe de $\mathbb{R}^2$, dont la frontière ∂K est une courbe fermée de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que si $n \geq 2$, on peut, en jouant au billard dans K, faire n rebonds et revenir au même point.

Exercice 42 ***(Forme forte de l'inégalité des accroissements finis).*** On commence par introduire certaines notations. Si $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, on note $\overline{\lim}_{t\to 0^+} g(t)$ (resp. $\underline{\lim}_{t\to 0^+} g(t)$) la plus grande (resp. la plus petite) valeur d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$ de $g(t)$ lorsque $t \to 0^+$. Ainsi, $\overline{\lim}_{t\to 0^+} g(t) = +\infty$, signifie qu'il existe une suite $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $t_k \to 0$ et $g(t_k) \to +\infty$. De même, $\overline{\lim}_{t\to 0^+} g(t) \geq C$ où $C \in \mathbb{R}$ signifie qu'il existe une suite $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $t_k \to 0$ et $g(t_k) - C \to 0$.

1) Soient $u < v$ deux réels. Soit $f : [u, v] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in [u, v[,\ \underline{\lim}_{h\to 0^+}\frac{f(t+h) - f(t)}{h} \leq C.$$

Montrer que $f(v) - f(u) \leq C(v - u)$.

2) On suppose cette fois-ci que

$$\forall t \in [u, v[,\ \underline{\lim}_{h\to 0^+}\frac{f(t+h) - f(t)}{h} \leq 0.$$

Montrer que f est décroissante.

3) Reformuler les deux premières questions dans le cas où f est dérivable à droite en tout point de $[u, v[$.

4) Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|)$ deux espaces vectoriels normés de dimension finie.

   a) Soient $u < v$ deux réels. Soit $f : [u, v] \to F$ une application continue. On suppose qu'il exite $C \in \mathbb{R}$ tel que

   $$\forall t \in [u, v[,\ \underline{\lim}_{h\to 0^+}\left\|\frac{f(t+h) - f(t)}{h}\right\| \leq C.$$

   Montrer que $\|f(v) - f(u)\| \leq C(v - u)$.

   b) Soit Ω un ouvert de E. Soient $a, b \in \Omega$ distincts tels que $[a, b] \subset \Omega$. On considère $f : \Omega \to F$ différentiable telle que $\forall x \in [a, b]$,

   $$|||df_x||| \leq C,$$

   où $|||\cdot|||$ désigne la norme triple subordonnée à $\|\cdot\|$. Montrer que $\|f(b) - f(a)\| \leq C\|b - a\|$.

Exercice 43. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Soient $a \in E$, $\rho > 0$, et f continue de $B_f(a, \rho)$ dans $\mathbb{R}$ telle que f est différentiable sur $B(a, \rho)$. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in B(a, \rho)$ $\|\!|df_x|\!\| \geq C$, où $\|\!|\cdot|\!\|$ désigne la norme triple subordonnée à $\|\cdot\|$. Pour $r \in [0, \rho]$, on note $\alpha(r) = \max\{f(x),\ x \in B_f(a, r)\}$ et $\beta(r) = \min\{f(x),\ x \in B_f(a, r)\}$. Montrer que

$$\alpha(\rho) - f(a) \geq C\rho,\ \ \beta(\rho) - f(a) \leq -C\rho.$$

Exercice 44 *(Applications de gradient unitaire).* Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Si Ω est un ouvert non vide de E, on note $I(\Omega)$ l'ensemble des fonctions différentiables sur Ω telles que $\forall x \in \Omega$, $\|\nabla f(x)\| = 1$. En utilisant les deux exercices précédents, déterminer $I(E)$.

Exercice 45. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note

$$F_A = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \mid \nabla f \text{ borné },\ \nabla f(x) \perp Ax\ \forall x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) Le spectre de A ne rencontre pas $i\mathbb{R}$.
- (ii) F_A ne contient que des fonctions constantes.

Chapitre 16

Probabilités

Exercice 1. On note $\mathfrak{S}(\mathbb{N})$ l'ensemble des bijections de $\mathbb{N}$ dans lui même.

1) Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.
2) Montrer que $\mathfrak{S}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Exercice 2 ***(Une tribu dénombrable est finie).***

1) Soit $\mathcal{F} = \{F_n \ , \ n \in \mathbb{N}\}$ une partition dénombrable (infinie) d'un ensemble A. Décrire la plus petite tribu $\mathcal{T}$ contenant $\mathcal{F}$. Cette tribu est-elle dénombrable ?
2) On considère jusqu'à la fin de l'exercice un tribu $\mathcal{T}$ sur un ensemble E supposée dénombrable. Soit $a \in E$, montrer que $C(a) = \cap_{A \in \mathcal{T},\, a \in A} A$ est un élément de $\mathcal{T}$.
3) Montrer que la relation sur E définie par $a \sim b \Leftrightarrow b \in C(a)$ est une relation d'équivalence. Quelles sont les classes d'équivalence ?
4) Montrer que la plus petite tribu contenant $\mathcal{P} = \{C(a) \, , \, a \in E\}$ est $\mathcal{T}$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 3 ***(Lemme de Sperner - preuve combinatoire).*** On appelle antichaîne de $\mathcal{P}([\![1, n]\!])$ toute partie $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}([\![1, n]\!])$ non vide et telle que

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{A}^2, \ X \neq Y \Rightarrow X \not\subset Y.$$

Donner un exemple d'antichaîne de cardinal $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. On souhaite montrer que toute antichaîne de $\mathcal{P}([\![1, n]\!])$ est de cardinal majoré par $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Soit $A \subset [\![1, n]\!]$ de cardinal $k \geq 1$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On dit que σ *commence* par A si et seulement si $A = \{\sigma(1), \ldots, \sigma(k)\}$. En utilisant cette notion, montrer que si $\mathcal{A}$ est une antichaîne de $\mathcal{P}([\![1, n]\!])$,

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} |A|!(n - |A|)! \leq n!.$$

Conclure.

Exercice 4 ***(Lemme de Sperner - preuve probabiliste).*** Soient $A_1, \ldots, A_p$ des parties de $[\![1, n]\!]$ telles que $\forall i \neq j$,

$$A_i \not\subset A_j.$$

On se propose de montrer que $p \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. On munit pour cela $\mathfrak{S}_n$ de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. On note aussi pour $i \in [\![1, p]\!]$ E_i l'évènement : "$\{\sigma(1), \ldots, \sigma(a_i)\} = A_i$" où $a_i = |A_i|$.
Calculer $\mathbb{P}(E_i)$ puis en déduire

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} \leq 1.$$

Conclure.

Exercice 5. On considère 5 personnes assises autour d'une table ronde. On suppose que 2 mouchoirs sont susceptibles de circuler entre les personnes de la table selon la règle suivante : si un individu a le mouchoir au i-ième tour, il le donne à l'individu situé à sa gauche ou à sa droite avec la même probabilité 1/2. On suppose qu'initialement deux voisins ont chacun un mouchoir. Déterminer l'espérance du temps minimal au bout duquel un individu se retrouve avec les deux mouchoirs.

Exercice 6. On considère une urne comportant 27 boules. Sur chacune de ces boules est inscrit un chiffre entre 0 et 3 ; le chiffre k est porté par n_k boules avec $n_0 = 8$, $n_1 = 12$, $n_2 = 6$ et $n_3 = 1$. On effectue N tirages avec remise dans cette urne et on considère alors la somme S des N éléments de $\{0, \ldots, 3\}$ ainsi obtenus. Quelle est la loi de S ?

Exercice 7. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ telles que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|A \cap \{0, \ldots, n\}|}{n} \text{ existe.}$$

Pour $A \in \mathcal{A}$, on note $\mu(A)$ cette limite.

1) Démontrer que pour tout $t \in [0, 1]$, il existe $A_t \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A_t) = t$.
2) $\mathcal{A}$ est-il une tribu sur $\mathbb{N}$?
3) Existe-t-il une tribu sur $\mathbb{N}$ contenant $\mathcal{A}$, et une probabilité sur cette tribu dont la restriction à $\mathcal{A}$ est μ ?

Exercice 8. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A_1, \ldots, A_n$ des évènements. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note C_k l'évènement "appartenir à A_i pour au moins k valeurs de i". Montrer que

$$\prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(C_k) \leq \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

Exercice 9.

1) Soient E un ensemble fini et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E. Montrer la formule de Poincaré,

$$\left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| = \sum_{J \subset I,\, J \neq \emptyset} (-1)^{|J|+1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

2) On définit la fonction de Mobiüs, $\mu : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$ par : $\mu(1) = 1$, si $n = p_1 \ldots p_r$ où les p_i sont des nombres premiers deux à deux distincts alors $\mu(n) = (-1)^r$ et $\mu(n) = 0$ sinon. Soit $n \geq 1$, calculer
$$\sum_{d | n} \mu(d).$$

3) Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$. On lui associe $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$ définie pour $n \geq 1$ par $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$. Établir la formule d'inversion : si $n \geq 1$,
$$f(n) = \sum_{d | n} g(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

4) Pour $n \geq 1$, montrer que $\varphi(n) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$.
5) Soit $n \geq 1$. Notons $p_1, \ldots, p_r$ les nombres premiers inférieurs ou égaux à n. Soit $U_i = \{(a, b) \in [\![1, n]\!]^2 \mid p_i | a,\ p_i | b\}$.

a) Montrer que

$$\left|\bigcup_{i=1}^{r} U_i\right| = -\sum_{k=2}^{n} \mu(k) \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor^2.$$

b) On choisit au hasard et de façon équiprobable deux entiers dans $[\![1, n]\!]$ et on appelle $\mathbb{P}_n$ la probabilité que ces entiers soient premiers entre eux. Calculer $\mathbb{P}_n$.

c) Calculer la limite de $\mathbb{P}_n$ lorsque n tend vers l'infini. On montrera que

$$\mathbb{P}_n \underset{n\to+\infty}{\to} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)}{k^2}$$

et on calculera cette somme.

Exercice 10. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(X = k+1) > 0$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoire indépendantes et de même loi que X. Soit $p > 1$ un entier. Déterminer la limite lorsque n tend vers l'infini de $\mathbb{P}(\, p \mid \sum_{i=1}^{n} X_i)$.

Exercice 11. Soient $X_1, \ldots, X_{2n}$ $2n$ variable aléatoires indépendantes, à valeurs réelles et de même loi. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \ldots X_{2n}}{2n} - \alpha\right| \leq \left|\frac{X_1 + \ldots X_n}{n} - \alpha\right|\right) \geq \frac{1}{2}.$$

Exercice 12. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes à valeurs réelles. On note $M = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{1\leq i,j\leq n}$. Montrer que M est diagonalisable et que ses valeurs propres sont toutes positives.

Exercice 13.

1) Soit X une variable aléatoire discrète réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et à valeurs dans un ensemble dénombrable E. On appelle *mode* de X tout réel a tel que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X = x) \leq \mathbb{P}(X = a).$$

On note $\mathbb{M}(X)$ l'ensemble des modes de X. Montrer que $\mathbb{M}(X)$ est non vide et fini.

2) Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et à valeurs dans le même ensemble dénombrable E. On suppose que X et $X + Y$ ont même loi et que X et Y sont indépendantes. Montrer que Y est presque sûrement nulle.

Exercice 14. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $[-1, 1]$, centrée et de variance $\sigma^2 > 0$.

1) Démontrer que pour tout $t \in [0, 1]$, $\mathbb{E}[e^{tX}] \leq 1 + \sigma^2 t^2$.

2) En déduire que si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X, alors $\forall \mu \in]0, 2\sigma^2]$

$$\mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_n \geq n\mu) \leq e^{-\frac{n\mu^2}{4\sigma^2}}.$$

Exercice 15. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une famille de variables aléatoires indépendantes de même loi. On suppose qu'il existe $p \in]0, 1[$ tel que

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = p,\ \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - p.$$

On pose $S = X_1 + \ldots X_n$. Soit $a \in](2p - 1)n, n[$. Montrer que

$$\mathbb{P}(S \geq a) \leq (1-p)^{\frac{n-a}{2}} p^{\frac{n+a}{2}} \left(\frac{2n}{\sqrt{n^2 - a^2}}\right)^n \left(\frac{n-a}{n+a}\right)^{\frac{a}{2}}.$$

Exercice 16 ***(Un cas particulier de la loi forte des grands nombres).*** Soient $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ des variables aléatoires discrètes indépendantes suivant une même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

1) Calculer $\mathbb{E}[e^{sS_n}]$ pour $s \in \mathbb{R}$.

2) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $K, C > 0$ dépendants de ε et λ uniquement tels que

$$\mathbb{P}(S_n \geq n(\lambda + \varepsilon)) \leq Ke^{-Cn}.$$

3) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\tilde{K}$,$\tilde{C} > 0$ dépendants de ε et λ uniquement tels que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \lambda\right| \geq \varepsilon\right) \leq \tilde{K}e^{-\tilde{C}n}.$$

4) En déduire que $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers λ.

Exercice 17.

1) a) Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t}.$$

b) Soit X une variable aléatoire discrète telle que $|X| \leq 1$ et $\mathbb{E}[X] = 0$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire e^{tX} est d'espérance finie et que

$$\mathbb{E}[e^{tX}] \leq e^{\frac{t^2}{2}}.$$

2) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires centrées, indépendantes telles que $|X_i| \leq a_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ où $a_i > 0$. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[e^{tS_n}] \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right).$$

b) Montrer que si $t, \varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right).$$

c) En déduire

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2\exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\right).$$

3) On considère enfin une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernouilli de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Trouver une suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon_n\right) \leq \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 18. Soit X_λ une variable aléatoire discrète. On suppose que X_λ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose
$$Z_\lambda = \frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}.$$

1) Calculer $\lim_{\lambda\to+\infty} E[e^{i\xi Z_\lambda}]$ pour $\xi \in \mathbb{R}$.

On définit pour $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} a(\xi)e^{i\xi x}d\xi$$
où $a : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que
$$E[f(Z_\lambda)] \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} a(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi.$$

3) Montrer de même que,
$$E[f(Z_\lambda)] \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$
On admettra que $\forall \xi \in \mathbb{R}$,
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$
et on appliquera sans justification le théorème de Fubini pour permuter les intégrales.

4) On suppose à présent f à support compact (continue sur son support). Montrer que
$$E[f(Z_\lambda)] \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Exercice 19 ***(Marche aléatoire sur*** $\mathbb{Z}$***).*** On imagine un objet, une puce par exemple, se déplaçant sur les entiers relatifs partant de l'origine. La puce se déplaçe à chaque étape d'un pas à gauche ou d'un pas à droite de façon équiprobable.

1) Quelle est la probabilité $\mathbb{P}_n$ que la puce revienne à l'origine en $2n$ étapes ?
2) Montrer que la probabilité que la puce revienne pour la première fois à l'origine au bout de $2n$ étapes est
$$\frac{1}{2^{2n}}\frac{1}{2n}\binom{2n-1}{n}.$$
3) On modélise plus formellement la marche aléatoire. Soient $X_1, \dots, X_n, \dots$ des variables aléatoires indépendantes de même loi de Rademacher. On note $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.
   a) Montrer que $\mathbb{P}\left(\left\{\forall i \geq n+1,\ \sum_{k=n+1}^i X_k \neq 0\right\}\right)$ est indépendant de n.
   b) Déterminer un équivalent de $\mathbb{P}_n$ en l'infini et étudier la nature de $\sum \mathbb{P}_n$.
   c) Montrer que la probabilité que la puce ne repasse qu'un nombre fini de fois à l'origine est donnée par la somme
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{S_{2n} = 0 \ \text{ et } \ \left(\forall i \geq 2n+1,\ \sum_{k=2n+1}^{i} X_k \neq 0\right)\right\}\right).$$
   d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(\left\{\forall i \geq n+1,\ \sum_{k=n+1}^i X_k \neq 0\right\}\right) = 0$. En déduire que presque sûrement la puce retourne une infinité de fois à l'origine.
   e) Calculer
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}}\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}.$$

Exercice 20 ***(Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$).*** On s'intéresse au saut d'une puce à partir de l'origine de $\mathbb{Z}^2$. Soient $D_n = (X_n, Y_n)$ des vecteurs aléatoires indépendants, de même loi avec

$$\mathbb{P}(D_n = (1,0)) = \mathbb{P}(D_n = (0,1)) = \mathbb{P}(D_n = (-1,0)) = \mathbb{P}(D_n = (0,-1)) = \frac{1}{4}.$$

1) Les variables aléatoires X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?
2) On pose $U_n = X_n + Y_n$ et $V_n = X_n - Y_n$. Montrer que U_n et V_n sont indépendantes.
3) On note $S_n = D_1 + \ldots + D_n \in \mathbb{Z}^2$, avec la convention $S_0 = 0$. Montrer que
$$\mathbb{E}[\|S_n\|] \leq \sqrt{2n}$$
où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^2$.
4) Déterminer $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$. Étudier $\sum \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ et en déduire que presque sûrement la puce revient une infinité de fois à l'origine.

Exercice 21 ***(Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^3$).*** On s'intéresse enfin au saut d'une puce à partir de l'origine de $\mathbb{Z}^3$. Soient $D_n = (X_n, Y_n, Z_n)$ des vecteurs aléatoires indépendants, de même loi, avec

$$\mathbb{P}(D_n = (1,0,0)) = \mathbb{P}(D_n = (-1,0,0)) = \ldots = \mathbb{P}(D_n = (0,0,-1)) = \frac{1}{6}.$$

On note $S_0^{(3)} = 0$ et $S_n^{(3)} = D_1 + \ldots + D_n$.

1) Déterminer $\mathbb{P}(S_{2n}^{(3)} = 0)$.
2) En notant $\mathbb{P}_n^{(k)}$ la probabilité de retour à l'origine de la puce en $2n$ étapes dans $\mathbb{Z}^k$ où $k \in \{1,2,3\}$, établir
$$\mathbb{P}(S_{2n}^{(3)} = 0) = \frac{1}{3^{2n}} \sum_{l=0}^{n} 2^{2l} \binom{2n}{2l} \mathbb{P}_{n-l}^{(1)} \mathbb{P}_l^{(2)}.$$
On commencera par calculer $\sum_{a=0}^{l} \binom{l}{a}^2$ et on admettra (ou pas...)
$$\mathbb{P}_n^{(1)} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}, \quad \mathbb{P}_n^{(2)} = \left(\mathbb{P}_n^{(1)}\right)^2.$$
3) Montrer que $\mathbb{P}_n^{(3)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$. On écrira $\frac{1}{6^{2n}} = \frac{1}{2^{2n+2l}} \left(\frac{2}{3}\right)^{2l} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-2l}$.
4) En déduire le théorème de Polya : la puce ne revient presque sûrement qu'un nombre fini de fois à l'origine.

Exercice 22 ***(Théorème de Weierstrass à deux variables).*** On pose $I = [0,1]$ et on munit l'espace $\mathbb{R}^2$ de sa norme euclidienne canonique $\|\cdot\|$. Soit $f : I^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $z = (x,y) \in I^2$ fixé. Soient X et Y deux variables de Bernouilli indépendantes de paramètres respectifs x et y, $Z = (X,Y)$, et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((X_n, Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de copies indépendantes de Z. On pose enfin $S_n = Z_1 + \ldots + Z_n$.

1) Montrer que
$$\mathbb{E}\left[\left\|\frac{S_n}{n} - z\right\|^2\right] = \frac{x(1-x)}{n} + \frac{y(1-y)}{n} \leq \frac{1}{2n}.$$
2) On pose $B_n(x,y) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]$. Montrer que B_n est polynomiale en x, y.
3) Montrer que f est limite uniforme sur I^2 d'une suite de polynômes à deux variables.

Exercice 23. Soit $n \geq 1$. On note $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique et de la norme associée $\| \cdot \|_E$ et on note $F = \mathbb{R}^n$ muni de $\| \cdot \|_F = \| \cdot \|_\infty$.

1) Soit $a : E \to F$ une application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques est à coefficients dans $\{\pm 1\}$. Calculer la norme triple de a.
2) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice formée de n^2 variables de Rademacher. On suppose de plus que pour chaque i les coefficients de la i-ème ligne sont mutuellement indépendants. On note $a : E \to F$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques est A. Montrer que
$$\sup_{\|x\|_E \leq 1} \mathbb{E}\left[\|a(x)\|_F\right] \leq \sqrt{2\ln(2n)}.$$
On pourra commencer par démontrer l'inégalité de Jensen probabiliste : si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application convexe, X est une variable aléatoire discrète à valeurs réelles telle que X et $f(X)$ admettent une espérance finie, alors
$$f\left(\mathbb{E}\left[X\right]\right) \leq \mathbb{E}\left[f(X)\right].$$

Exercice 24 ***(Un théorème de Hardy-Ramanujan).*** Soit $N \geq 1$ un entier et X un variable aléatoire discrète suivant une loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$. Soit Y la variable aléatoire discrète qui compte le nombre de facteurs premiers distincts de X.

1) Démontrer l'inégalité
$$\sigma(Y)^2 \leq 3\mathbb{E}[Y] + 2.$$
2) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\mathbb{P}\left(|Y - \mathbb{E}[Y]| \geq \varepsilon \mathbb{E}[Y]\right) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 25.

1) Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $[\![1, n]\!]$. Montrer que la loi de X est déterminée par les $\mathbb{E}[X^k]$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.
2) Soit Y une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe $a \in]0,1[$ tel que $\mathbb{P}(Y = k) = o(a^k)$. Montrer que Y admet des moments à tout ordre et qu'ils déterminent la loi de Y.

Exercice 26. Soient $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mathbb{P}_i)_{1 \leq i \leq 2}$ deux espaces probabilisés. Pour $i \in \{1, 2\}$ on pose $X_i : \Omega_i \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X_i(t)$ est une variable aléatoire discrète à valeurs réelles et pour tout $\omega \in \Omega_i$, $t \mapsto X_i(t, \omega)$ est de classe $\mathcal{C}^2$.

1) On suppose que $X_1(0)$ et $X_2(0)$ ont même loi et que pour $i = 1, 2$
$$\forall \omega \in \Omega_i,\ \forall t \in \mathbb{R}\ \ X_i'(t, \omega) = tX_i(t, \omega).$$
Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X_1(t)$ et $X_2(t)$ ont même loi.

On suppose à présent $(X_1(0), X_1'(0))$ et $(X_2(0), X_2'(0))$ de même loi et de même image.

2) On considère a, b deux applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On suppose que pour $i = 1, 2$
$$\forall \omega \in \Omega_i,\ \forall t \in \mathbb{R}\ \ X_i''(t, \omega) + a(t)X_i'(t, \omega) + b(t)X_i(t, \omega) = 0.$$
Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X_1(t)$ et $X_2(t)$ ont même loi. Retrouver ce résultat différemment si l'on suppose en plus pour $i = 1, 2$ $(X_i(0), X_i'(0))$ injective.
3) On suppose désormais Ω_1 et Ω_2 finis et que X_1 et X_2 sont solutions de
$$\forall \omega \in \Omega_i,\ \forall t \in \mathbb{R}\ \ X_i''(t, \omega) + a(t)X_i'(t, \omega) + b(t)\mathbb{E}[X_i(t, \omega)] = 0.$$
Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X_1(t)$ et $X_2(t)$ ont même loi.

Exercice 27 ***(Lemme de convergence monotone).*** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs positives. On suppose que presque sûrement $\sum X_n$ converge vers une variable aléatoire S (que l'on suppose discrète). On suppose en outre que les espérances des X_n sont finies et que $\sum \mathbb{E}[X_n]$ converge.

1) On pose $S_n = \sum_{k=0}^n X_k$. Montrer que $\cup_{n\in\mathbb{N}} S_n(\Omega)$ est dénombrable.
2) Soit $\alpha \in]0,1[$. On pose $N = \min\{n \in \mathbb{N} \mid S_n \geq \alpha S\}$. Montrer que N est une variable aléatoire discrète presque sûrement finie. Montrer que S_N est une variable aléatoire discrète.
3) Montrer que $(\mathbb{E}[\mathbb{1}_{N=n} X_k])_{n\geq k\geq 0}$ est sommable et exprimer sa somme.
4) Montrer que S_N est d'espérance finie et calculer $\mathbb{E}[S_N]$.
5) Montrer enfin que S est d'espérance finie et que

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}[X_n].$$

Exercice 28 ***(Loi forte des grands nombres, cas $\mathcal{L}^2$).*** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes réelles indépendantes et de même loi. On suppose que $\mathbb{E}[X_1^2] < +\infty$. On pose $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ et $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

1) Soit $\varepsilon > 0$ montrer que $\sum \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_{m^2}}{m^2} - \mu\right| > \varepsilon\right)$ converge.
2) En déduire que presque sûrement
$$\lim_{m\to+\infty} \frac{S_{m^2}}{m^2} = \mu.$$
3) Supposons les X_n à valeurs positives. Montrer que presque sûrement
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \mu.$$
4) Montrer que le résultat est toujours vrai dans le cas général.

Exercice 29 ***(Séries aléatoires (1)).*** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Pour $k \geq 1$, on a donc $\mathbb{P}(X_n = k) = p(1-p)^{k-1}$. On souhaite étudier la convergence de $\sum \frac{1}{n^\alpha X_n}$ pour $\alpha > 0$. On pose

$$\mathcal{A}_\alpha = \left\{\omega \in \Omega\,,\ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)} \text{ converge}\right\}.$$

1) Déterminer $\mathbb{P}(\mathcal{A}_\alpha)$ si $\alpha > 1$.
2) On suppose $\alpha \in]0,1[$.
   a) Montrer que si $n \geq 1$,
   $$\mathbb{P}(X_n > n^{1-\alpha}) \leq (1-p)^{n^{1-\alpha}-1}.$$
   b) Montrer que
   $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} \{X_k > k^{1-\alpha}\}\right) = 0.$$
   c) En déduire la nature presque sûre de $\sum \frac{1}{n^\alpha X_n}$.
3) Traiter le cas $\alpha = 1$.

Exercice 30 ***(Séries aléatoires (2)).*** Soient $X_1, \dots, X_n, \dots$ des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Rademacher. On s'intéresse à la nature de $\sum \frac{X_k}{\sqrt{k}}$.

1) **Première méthode**.
   a) (Inégalité de Paley-Zygmund) Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. On suppose que X admet un moment d'ordre 2. Soit $\lambda \in]0,1[$, montrer que
$$\mathbb{P}(X \geq \lambda \mathbb{E}[X]) \geq (1-\lambda)^2 \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$
   b) On note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{\sqrt{k}}$. En utilisant a), montrer que $\mathbb{P}((S_n)_{n\geq 1}$ non bornée $) > 0$. Conclure sur la nature presque sûre de la série étudiée (on admet le lemme zéro-un de Borel).
2) **Deuxième méthode**.
   a) On pose encore $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{\sqrt{k}}$. Déterminer $\phi_{S_n} = \mathbb{E}[e^{i \cdot S_n}]$, fonction caractéristique de S_n.
   b) Montrer que si $t \neq 0$, $\phi_{S_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
   c) Démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$,
$$|\phi_{S_{n+p}-S_n}(t) - 1| \leq |t| + 2\mathbb{P}(|S_{n+p} - S_n| \geq 1).$$
   d) Établir l'existence d'une extraction $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que pour tout $n \geq 1$,
$$\mathbb{P}(|S_{\varphi(n+1)} - S_{\varphi(n)}| \geq 1) \geq \frac{1}{4}.$$
   e) Conclure.

Exercice 31 ***(Balls in bins).*** On lançe n boules indépendamment et uniformément dans n boîtes. On note M_n le nombre maximal de boules dans une boîte. Étudier le comportement asymptotique de M_n.

Exercice 32. Soient σ_n une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$, et C_n la variable aléatoire donnant le nombre de cycles intervenant dans la décomposition de σ_n en produit de cycles à support disjoint. Montrer que l'on peut écrire
$$C_n \sim X_1 + \ldots + X_n$$
où pour $i \in [\![1, n]\!]$, X_i est une variable de Bernouilli de paramètre $1/i$ et où les X_i sont mutuellement indépendantes. En déduire un équivalent de $\mathbb{E}[C_n]$.

Exercice 33 ***(Transformée de Laplace).*** Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs positives. On pose $\Phi_X : \lambda \in \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{E}[e^{-\lambda X}]$. Montrer que Φ_X est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que Φ_X caractérise la loi de X.

Exercice 34 ***(Inégalité de Kolmogorov).*** Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, centrées et de même loi, à support fini. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que
$$\forall (x,n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq x\right) \leq \frac{Cn}{x^2}.$$

Exercice 35 ***(Loi forte des grands nombres de Kolmogorov).*** Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes centrées et admettant une variance. On suppose en outre que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{E}[X_i^2]}{i^2} < +\infty.$$

Montrer que $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers 0 où l'on a posé $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

Exercice 36 ***(Inégalités de Khintchine).*** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Rademacher définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note $V = \mathrm{Vect}(X_n)_n$ et on admet que si $p \geq 1$, on définit une semi-norme sur V en posant $\|X\|_p = \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p}$. Le but de cet exercice est de montrer, sous une forme précisée, que ces semi-normes sont équivalentes sur l'espace de dimension infinie V. Soit $X = \sum_{j=1}^n a_j X_j$ où les a_i sont des réels.

1) Calculer $\|X\|_2$.
2) On suppose ici $\sum_{j=1}^n a_j^2 = 1$.
   a) Montrer que si $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \leq e^{\frac{x^2}{2}}$.
   b) Montrer que si $t \in \mathbb{R}$,
   $$\mathbb{E}[e^{tX}] \leq e^{\frac{t^2}{2}}.$$
   c) Soit $q \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer que :
      (i) Pour tout $t > 0$, $\|X\|_{2q}^{2q} \leq (2q)!t^{-2q}e^{\frac{t^2}{2}}$.
      (ii) $\|X\|_{2q} \leq \sqrt{2eq}$.
3) Montrer que pour tout $p \geq 1$, $\|X\|_p \leq \sqrt{2ep}\|X\|_2$. On utilisera le fait que $p \mapsto \|X\|_p$ est croissante.
4) On souhaite montrer qu'il existe une constante $C' > 0$ telle que $\|X\|_2 \leq C'\|X\|_1$. On suppose sans perte de généralités que $\sum_{j=1}^n a_j^2 = 1$ et on considère la variable aléatoire complexe $R = \prod_{j=1}^n (1 + ia_j X_j)$.
   a) Montrer que $\|R\|_\infty \leq \sqrt{e}$.
   b) Calculer pour $j \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{E}[X_j R]$.
   c) Conclure.

Exercice 37. Soit T un ensemble fini de cardinal $N \geq 2$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi de Rademacher. Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_n : T \to \mathbb{R}$. On pose

- Si $t \in T$, $Y_t = \sum_{j=1}^n \varphi_j(t) X_j$.
- $M = \sup\limits_{t\in T} |Y_t|$.
- $\sigma = \sup\limits_{t\in T} \left(\sum_{j=1}^n \varphi_j(t)^2\right)^{1/2}$.

1) En utilisant les inégalités de Khintchine, montrer que pour tout $p \geq 1$,
$$\|M\|_p = \mathbb{E}[M^p]^{1/p} \leq \sigma N^{1/p}\sqrt{2ep}.$$
2) Montrer qu'il existe une constante absolue $C > 0$ telle que
$$\mathbb{E}[M] \leq C\sigma\sqrt{\ln N}.$$

Exercice 38 ***(Sous-espaces presques euclidiens de*** $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$***).*** On note ℓ_∞^n l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la norme infinie. On considère F un sous-espace presque euclidien de ℓ_∞^n au sens suivant : il existe une base $(e_1, \ldots, e_d)$ de F telle que pour $x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{R}$

$$\left(\sum_{j=1}^{d} x_j^2\right)^{1/2} \leq \left\|\sum_{j=1}^{d} x_j e_j\right\|_\infty \leq 2\left(\sum_{j=1}^{d} x_j^2\right)^{1/2}.$$

Cela signifie que l'espace $(F, \|\cdot\|_\infty)$ est "presque" isométrique à l'espace euclidien $(\mathbb{R}^d, \|.\|_2)$. On se propose de majorer d en fonction de n. On note alors $M \in \mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{R})$ la matrice de la famille $(e_1, \ldots, e_d)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de sorte que pour $j \in [\![1, d]\!]$, $e_j = (m_{ij})_{1 \leq i \leq n}$. L'hypothèse se réecrit alors, pour tout $x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{R}$,

$$\left(\sum_{j=1}^{d} x_j^2\right)^{1/2} \leq \max_{1 \leq i \leq n}\left|\sum_{j=1}^{d} x_j m_{ij}\right| \leq 2\left(\sum_{j=1}^{d} x_j^2\right)^{1/2}.$$

1) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi de Rademacher. En utilisant les inégalités de Khintchine montrer que

$$\sqrt{d} \leq 2e\sqrt{\ln n}\max_{1 \leq i \leq n}\left(\sum_{j=1}^{d} m_{ij}^2\right)^{1/2}.$$

2) Montrer que si $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\left(\sum_{j=1}^{d} m_{ij}^2\right)^{1/2} \leq 2.$$

3) Conclure que

$$d \leq 16e^2 \ln n.$$

Exercice 39. On considère n et d deux entiers vérifiant $2 \leq d \leq n$.

1) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $a_{ij} \geq 0$ et $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$. Montrer que le spectre de A est inclus dans $[-1, 1]$.

On note $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ les valeurs propres de A. On admet que $\lambda_2 \leq 1 - 2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\mu_A$ où

$$\mu_A = \min\left\{\sum_{i \in I, j \notin I} a_{ij},\ I \subset [\![1, n]\!] \text{ et } 0 < |I| < n\right\}.$$

2) Soit Γ un graphe connexe à n sommets. De chaque sommet S partent exactement d arêtes qui vont vers d sommets distincts (on n'exclut pas qu'une des arêtes revienne à S). Une particule se déplaçe d'un sommet à l'autre aux instants successifs $k = 0, 1, \ldots$ selon la loi suivante : Si à l'instant k la particule est en S, elle reste en S avec une probabilité $1/2$ et elle emprunte une des d arêtes issue de S avec la probabilité $1/(2d)$. Les choix s'effectuent en toute indépendance mutuelle. Si S et T sont des sommets et $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{P}_k(S, T)$ la probabilité pour que la particule étant en S à l'instant 0 soit en T à l'instant k. Étudier la convergence de la suite $(\mathbb{P}_k(S, T))_{k \in \mathbb{N}}$. On pourra utiliser le résultat d'algèbre linéaire sur les disques de Gershgörin.

3) Pour $\varepsilon > 0$, on note

$$I_{S,T}(\varepsilon) = \min\left\{k \in \mathbb{N},\ \frac{1 - \varepsilon}{n} \leq \mathbb{P}_k(S, T) \leq \frac{1 + \varepsilon}{n}\right\}.$$

Montrer que $I_{S,T}(\varepsilon) = \mathcal{O}\left(n^2 d \ln\left(\frac{n}{\varepsilon}\right)\right)$.

Exercice 40. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $Q \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ de degré $d \geq 1$. Soit S une partie finie de $\mathbb{K}$. Soient $U_1, \ldots, U_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur S. Montrer que

$$\mathbb{P}(Q(U_1, \ldots, U_n) = 0) \leq \frac{d}{|S|}.$$

Exercice 41. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Soient X_1, X_2, deux variables aléatoires de même loi que X. On suppose que $X_1 + X_2 \sim 2X$. Montrer que X est presque sûrement constante.

Exercice 42. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient X_n et Y_n deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$.

1) Montrer que $\mathbb{P}(X_n Y_n = Y_n X_n) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.
2) Calculer $\mathbb{P}(X_n Y_n = Y_n X_n)$.

Exercice 43. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la matrice $M_n = (X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où les X_{ij} sont des variables de Rademacher indépendantes.

1) Calculer $\mathbb{E}[\det M_n]$ et $V(\det M_n)$.
2) Que dire des lois $\det M_n$ et $-\det M_n$?
3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $Y = {}^tAA$. Montrer que

$$\det Y \leq \prod_{i=1}^{n} Y_{i,i}.$$

4) Montrer qu'il existe $a \in]0, 1[$ tel que $P(|\det M_n| = n^{n/2}) = \mathcal{O}(a^n)$.
5) Soit $\varepsilon > 0$. Que dire de $\mathbb{P}(|\det M_n| \geq n^{n/2-\varepsilon})$?

Exercice 44 *(Un théorème local limite).* Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, à support fini, non constante presque sûrement. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de même loi que X. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

1) Montrer qu'il existe une constante $c_1 > 0$ telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{c_1}{\sqrt{n}} \leq \sup_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(S_n = k).$$

2) Montrer que si $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\mathbb{E}[e^{itX}]\right)^n e^{-ikt} dt.$$

3) Montrer qu'il existe une constante $c_2 > 0$ telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(S_n = k) \leq \frac{c_2}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 45 ***(Lois infiniment divisibles).*** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(X=0)>0$. On dit que X est *infiniment divisible* si, $\forall n \geq 1$, il existe n variables aléatoires X_i^n avec $i \in [\![1,n]\!]$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et de même loi, telles que $X \sim X_1^n + \ldots + X_n^n$.

1) Donner un exemple de variable aléatoire infiniment divisible. Donner un exemple de variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que $\mathbb{P}(X=0)>0$ et X non infiniment divisible.
2) Montrer que X est infiniment divisible si et seulement si G_X peut s'écrire sous la forme $z \mapsto p_0 \exp\left(\sum_{i\geq 1} b_i z^i\right)$, où les b_i sont des réels positifs vérifiant $\sum b_i$ converge, et où $p_0 >$.
3) Donner une interprétation probabiliste du résultat précédent.

Exercice 46. On considère des variables aléatoires discrètes réelles X,Y et Z. On suppose que $X+Y \sim X+Z$.

1) Peut-on affirmer que Y et Z ont même loi ?
2) Et si X, Y et Z sont indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$?
3) Et si X, Y et Z sont indépendantes et bornées ?
4) Et si X, Y et Z sont indépendantes ?

Exercice 47. Soit X une variable aléatoire discrète réelle. On suppose qu'il existe des réels $a \geq 0$ et $b \neq 0$ tels que $X \sim aX+b$. Montrer que X est presque sûrement constante.

Exercice 48. Soient $n \geq 1$, $(X_k^n)_{k\geq 1}$ une suite de v.a i.i.d de loi uniforme sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$. Soit T_n la variable aléatoire égale au minimum de l'ensemble des $k>0$ tels que $\mathrm{Vect}(X_1^n, \ldots, X_k^n) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ si cet ensemble est non vide, et $+\infty$ sinon. Montrer que T_n/n tend vers 1 en probabilités.

Exercice 49. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $R_n = |\{X_1, \ldots, X_n\}|$.

a) Montrer que $\mathbb{E}[R_n] = o(n)$.
b) On suppose que les X_i admettent une espérance. Montrer que $\mathbb{E}[R_n] = o(\sqrt{n})$.

Exercice 50. Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes strictement positives, toutes d'espérance 1. Pour $n \geq 1$, on pose $P_n = \prod_{k=1}^n X_k$. Montrer que $(P_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilités vers 0 si et seulement si

$$\prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\sqrt{X_k}] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 51.

a) Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que $0 < \mathbb{E}[X^2] < +\infty$. Montrer que

$$\mathbb{P}(X>0) \geq \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

Pour $n \geq 1$, on se donne $p_n \in]0,1[$. On considère le graphe aléatoire Γ_n, de sommets $1, \ldots, n$, tel que, pour tout (i,j) tel que $1 \leq i < j \leq n$, si $X_{i,j}$ est la variable aléatoire qui vaut 1 lorsque (i,j) est une arête de Γ_n et 0 sinon, les $X_{i,j}$ sont indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p_n. On note Y_n la variable aléatoire qui donne le nombre de sommets isolés.

b) On suppose que $\frac{\ln n}{n} = o(p_n)$. Montrer que

$$\mathbb{P}(Y_n > 0) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

c) On suppose que $p_n = o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$. Montrer que

$$\mathbb{P}(Y_n > 0) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Exercice 52. On note $(p_k)_{k \geq 1}$ la suite ordonnée des nombres premiers et, pour $n \geq 1$, $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n et $d(n)$ le nombre de diviseurs premiers de n. Pour $n \geq 1$, on considère une variable aléatoire N_n suivant une loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$.

a) Soit $n \geq 1$. Pour chaque $i \in \{1, \ldots, \pi(n)\}$ on note X_i la variable aléatoire donnant l'exposant de p_i dans la décomposition de N_n en facteurs premiers. Donner la loi de X_i.

b) Pour $n \geq 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{\pi(n)} \frac{1}{p_k}$. Montrer que $\mathbb{E}[d(N_n)] = H_n + \mathcal{O}(1)$ et que $V(d(N_n)) = \mathcal{O}(H_n)$.

c) On admet que $H_n = \ln \ln n + \mathcal{O}(1)$. Soit $\varepsilon > 0$, montrer que

$$\mathbb{P}\left(1 - \varepsilon \leq \frac{d(N_n)}{\ln \ln n} \leq 1 + \varepsilon\right).$$

Chapitre 17

Compléments

Exercice 1. Soit $n \geq 1$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. On note $\|.\|$ la norme euclidienne. Soit S une partie finie de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\sum_{(x,y)\in S^2} \|x - y\| \leq \sum_{(x,y)\in S^2} \|x + y\|.$$

On commencera par le cas $n = 1$ et on cherchera une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$,

$$\|u\| = \int_{w\in\mathbb{R}^n} C|\langle u, w\rangle| \exp\left(-\frac{1}{2}\|w\|^2\right) dw.$$

Exercice 2. Établir l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour tout $p, q \in \mathbb{N}^*$ avec $p \wedge q = 1$

$$\sum_{k=1}^{q-1} \frac{1}{\left|1 - \exp\left(\dfrac{2\pi ikp}{q}\right)\right|} \leq Cq \ln q.$$

Exercice 3. Montrer que pour tout $(A, B) \in SL_2(\mathbb{C})$,

$$\operatorname{Tr}(AB) + \operatorname{Tr}(AB^{-1}) = \operatorname{Tr}(A)\operatorname{Tr}(B).$$

Exercice 4 *(Théorème de Cantor Bernstein).*

1) Soit E un ensemble. Soit φ une application croissante de $\mathcal{P}(E)$ dans lui même pour l'inclusion. Montrer que φ admet un point fixe.
2) Soient E et F deux ensembles, f une injection de E dans F et g une injection de F dans E. En considérant l'application qui à $A \in \mathcal{P}(E)$ associe $E \setminus (g(F \setminus f(A)))$, montrer qu'il existe une bijection de E sur F.

Exercice 5. On note $\lambda : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$ telle que $\lambda(1) = 1$, $\lambda(p) = -1$ si $p \in \mathcal{P}$ et pour tout $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\lambda(mn) = \lambda(m)\lambda(n)$.

1) Montrer que si $x \in]-1, 1[$, alors $\sum_{n\geq 1} \frac{\lambda(n)x^n}{1-x^n}$ converge. On note $N(x)$ sa somme.
2) Soit $x \in]-1, 1[$, calculer $N(x)$ à l'aide des $\sigma_n = \sum_{d|n} \lambda(d)$.
3) Calculer σ_n pour $n \geq 1$.
3) Déterminer un équivalent de N en 1^-.

Exercice 6 ***(Un opérateur contractant).*** On note ℓ^1 l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ telles que $\sum_{n\geq 0}|u_n| < +\infty$. Pour $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^1$, on pose $N(u)=\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|$.

1) Montrer que (ℓ^1, N) est un espace vectoriel normé.
2) Soit $\mathcal{P}$ la partie de ℓ^1 constituée des suites u d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telles que $N(u)=1$. On se donne par ailleurs une suite double $(P_{ij})_{i,j\geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telle que pour tout $i\in\mathbb{N}$, $\sum_{j\geq 0}P_{ij}=1$. Justifier pour $u\in\ell^1$, la définition de (uP) dans ℓ^1 telle que pour tout $j\in\mathbb{N}$, $(uP)_j=\sum_{i\geq 0}u_iP_{ij}$.
3) On suppose qu'il existe $c>0$ et $w=(w_j)_{j\geq 0}\in\mathcal{P}$ tels que pour tout $i,j\in\mathbb{N}$, $P_{ij}\geq cw_j$. Montrer que $c\leq 1$. Que dire si $c=1$?
4) Soit $u\in\ell^1$ telle que $\sum_{n\geq 0}u_n=0$. Montrer que
$$N(uP)\leq(1-c)N(u).$$
5) Montrer qu'il existe un unique $u\in\mathcal{P}$ tel que $uP=u$.

Exercice 7. Soit $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ une injection. Montrer que l'ensemble $\{n\in\mathbb{N}\,,\,\sigma(n)\geq n\}$ est infini.

Exercice 8. Soit $\sigma:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ une bijection. On suppose qu'il existe $\ell\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ tel que
$$\frac{\sigma(n)}{n}\underset{n\to+\infty}{\to}\ell.$$
Calculer ℓ.

Exercice 9. Montrer que $GL_2(\mathbb{Q})$ ne contient pas d'élément d'ordre 5.

Exercice 10. Si $\alpha\in\mathbb{R}$, on pose $c_\alpha(Q)=\inf\limits_{1\leq q\leq Q}Qd(q\alpha,\mathbb{Z})$ pour tout entier $Q\geq 1$.

1) Montrer que l'on a toujours $c_\alpha<1$.
2) Démontrer l'existence de $c>0$ telle que $c_{\sqrt{2}}(Q)\geq c$ pour tout $Q\geq 1$.

On pose désormais pour $n\geq 1$,
$$q_n=\frac{1}{n!}\int_0^{+\infty}x^n(x-1)^ne^{-x}dx$$
et
$$p_n=\frac{1}{n!}\int_0^{+\infty}x^n(x+1)^ne^{-x}dx.$$

3) Montrer que pour tout $n\geq 1$, q_n et p_n sont des entiers strictement positifs.
4) Donner un équivalent de $q_n|eq_n-p_n|$ lorsque $n\to+\infty$ et en déduire que c_e n'est pas minorée par une constante strictement positive.

Exercice 11. Calculer pour $n\geq 0$,
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}^2.$$

Exercice 12. Une fonction continue sur $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ est-elle bornée ?

Chapitre 18

Indications, solutions

Solution 1.

Solution 2.

Solution 3.

Solution 4.

Solution 5.

Solution 6.

Solution 7.

Solution 8.

Solution 9.

Solution 10. Les deux questions sont indépendantes.

1. Commencer par étudier le problème dans le groupe $H = \langle x \rangle$ où $x \in G$ (ce qui permet de se ramener à un groupe commutatif). Puis, pour traiter l'unicité dans le cas général, utiliser le travail précédent qui fournit pour x une racine p-ième dans H.
2. Raisonner par l'absurde et démontrer que l'on peut trouver $a \in G$ et m un entier non congru à 1 modulo p tels que
$$g = ag^m a^{-1}.$$
Remarquer alors que
$$g = ag^m a^{-1} = a^2 g^{m^2} a^{-2}$$
puis itérer ceci p fois pour obtenir une contradiction.

Solution 11.

Solution 12.

Solution 13.

Solution 14.

Solution 15.

Solution 16.

Solution 17.

Solution 18.

Solution 19.

Solution 20.

Solution 21.

Solution 22.

Solution 23.

Solution 24.

Solution 25.

Solution 26.

Solution 27.

Solution 28.

Solution 29.

Solution 30.

Solution 31.

Solution 32.

Solution 33.

Solution 34.

Solution 35.

Solution 36.

Solution 37.

Solution 38.

Solution 39.

Solution 40.

Solution 41.

Solution 42.

Solution 43.

Solution 44.

Solution 45.

Solution 46.

Solution 47.

Solution 48.

Solution 49.

Solution 50.

Solution 51.

Solution 52.

Solution 53.